Двумерни геометрични трансформации

1. Основни трансформации

1.1 Транслиране (преместване)

Зададена е точка с координати $P = (x, y)$. Трябва да се премести в нова позиция $P' = (x', y')$ с коефициенти на транслация T_x, T_y.

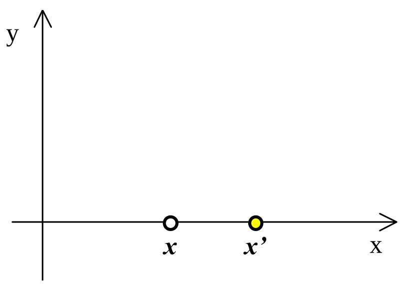
$$x' = x + T_x \qquad\qquad y' = y + T_y$$

Да дефинираме:

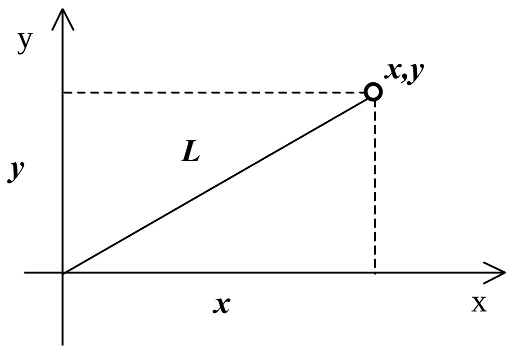
$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \qquad T = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \end{bmatrix}$$

Тогава $\boxed{P' = T + P}$

1.2 Мащабиране



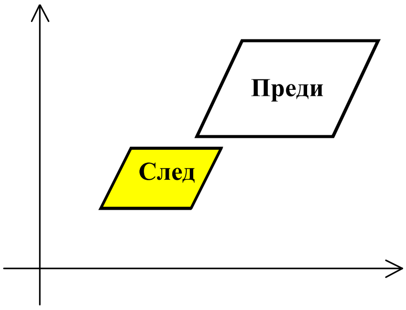
$$x' = x * S_x \qquad\qquad y' = y * S_y$$



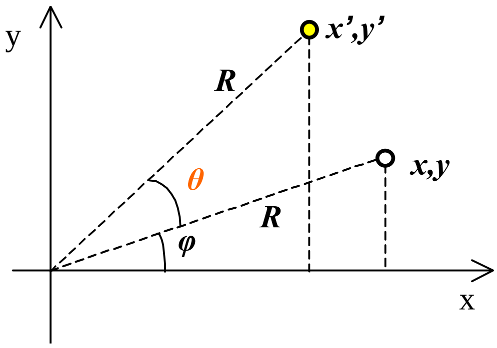
$$x' = x * S_x \qquad y' = y * S_y$$

Да дефинираме матрица на мащабиране:

$$S = \begin{bmatrix} S_x & 0 \\ 0 & S_y \end{bmatrix}$$ Тогава $\boxed{P' = S.P}$



1.3 Ротация около началото на координатната система



$$x = R.cos\varphi \qquad\qquad y = R.sin\varphi$$

$$x' = R.cos(\theta + \varphi) = R.cos\varphi.cos\theta - R.sin\varphi.sin\theta$$

$$y' = R.sin(\theta + \varphi) = R.cos\varphi.sin\theta + R.sin\varphi.cos\theta$$

Или

$$x' = x.cos\theta - y.sin\theta$$

$$y' = x.sin\theta + y.cos\theta$$

В матричен вид:

$$R = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} \qquad \boxed{P' = R.P}$$

2. Хомогенни координати и матрично представяне на трансформациите

Матрично представяне на трансформациите:

$$P' = T + P; \qquad P' = S.P; \qquad P' = R.P$$

Да сведем всички операции до умножение на матрици.

Хомогенни координати:

- (x, y) се представя с (x_h, y_h, h) където $x = \dfrac{x_h}{h}, \;\; y = \dfrac{y_h}{h}$
- Тогава всяка точка може да се опише с: $(hx, hy, h), \;\; h \neq 0$.
- Ако $h = 1$, всяка точка се представя с $(x, y, 1)$.
- Ще представяме всяка 2D точка с $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

2.1 Транслация

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

или $P' = T(T_x, T_y).P$, а

$$T(T_x, T_y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_x \\ 0 & 1 & T_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

е **матрица на транслация**.

Две последователни транслации:

$P \Rightarrow P'$ с $T(T_{x1}, T_{y1})$, а след това $P' \Rightarrow P''$ с $T(T_{x2}, T_{y2})$

$$P' = T(T_{x1}, T_{y1}).P$$

$$P'' = T(T_{x2}, T_{y2}).P' = T(T_{x2}, T_{y2}).[T(T_{x1}, T_{y1}).P] =$$

$$[T(T_{x2}, T_{y2}).T(T_{x1}, T_{y1})].P$$

$$T(T_{x2},T_{y2}).T(T_{x1},T_{y1}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T_{x1}+T_{x2} \\ 0 & 1 & T_{y1}+T_{y2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Следователно две последователни “транслации” са **адитивни** операции.

2.2 Мащабиране

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

или $P' = S(S_x, S_y).P$, а $S(S_x, S_y) = \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ е **матрица на мащабиране.**

Две последователни операции “мащабиране” са **мултипликативни** операции:

$$S(S_{x2},S_{y2}).S(S_{x1},S_{y1}] = \begin{bmatrix} S_{x1}.S_{x2} & 0 & 0 \\ 0 & S_{y1}.S_{y2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3 Ротация

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

или $P' = R(\theta).P$, а $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ е **матрица на ротация**

Две последователни операции “ротация” са **адитивни** операции:

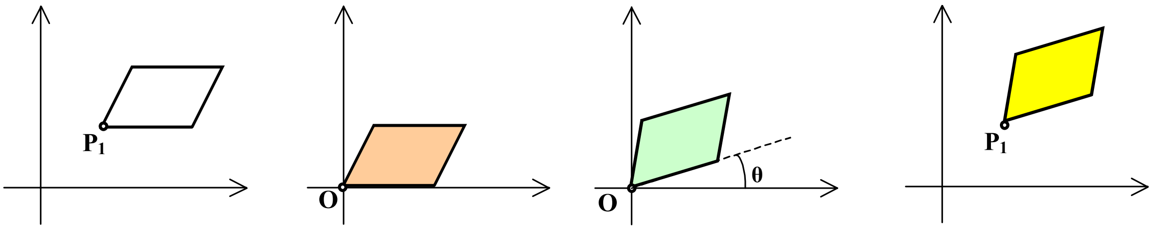
$$R(\theta_2).R(\theta_1) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) & -\sin(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ \sin(\theta_1+\theta_2) & \cos(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Композиция от трансформации

3.1 Ротация около произволна точка

Ротация около точка $P_1(x_1,y_1)$ с ъгъл θ:

- Транслация на P_1 до началото на координатната система с $T(-x_1,-y_1)$
- Ротация около началото с ъгъл θ с $R(\theta)$;
- Обратна транслация до точка P_1 с $T(x_1,y_1)$



Общата преобразуваща матрица ще е:

$$M = T(x_1,y_1).R(\theta).T(-x_1,-y_1) =$$

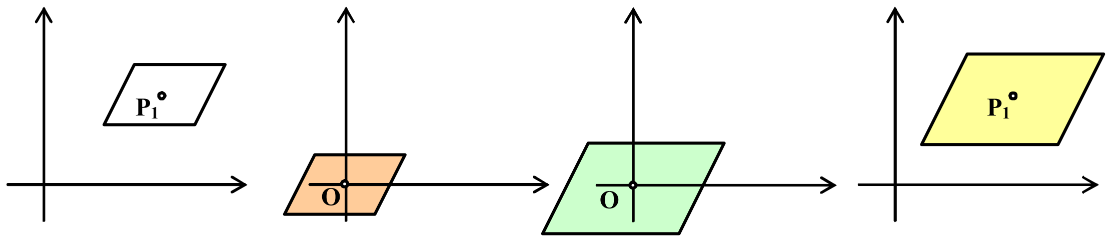
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_1 \\ 0 & 1 & -y_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_1(1-\cos\theta)+y_1\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & y_1(1-\cos\theta)-x_1\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.2 Мащабиране спрямо произволна точка

Мащабиране спрямо точка $P_1(x_1,y_1)$ с коефициенти на мащабиране S_x,S_y - аналогично:

$$M = T(x_1,y_1).S(S_x,S_y).T(-x_1,-y_1) = \begin{bmatrix} S_x & 0 & x_1(1-S_x) \\ 0 & S_y & y_1(1-S_y) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Ако M_1 и M_2 са трансформиращи матрици, $M_1.M_2 = M_2.M_1$, когато:

- И двете са матрици за транслация
- И двете са матрици за мащабиране
- И двете са матрици за ротация
- Едната е за ротация, а другата за мащабиране с $S_x = S_y$

4. Обща трансформираща матрица и ефективност на операциите за преобразуване

$$M = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

където r_{ij} са коефициенти, включващи само ъгли на ротация и параметри на мащабиране, а t_x, t_y са коефициенти на транслация, включващи комбинации от разстояния на транслиране, координати на точки на ротация и мащабиране и параметри на ротация и мащабиране.

Ако $\begin{Vmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{Vmatrix} = 1$ (ортогонална матрица), се запазват:

- Паралелизмът на линиите;
- Дължините на отсечките;
- Ъглите между тях.

Операцията $P' = M.P$ изисква **9** операции "умножение" и **6** "събиране", но могат да се използват и опростени формули:

$$x' = x.r_{11} + y.r_{12} + t_x$$

$$y' = x.r_{21} + y.r_{22} + t_y$$

Тогава са необходими **4** операции "умножение" и **4** "събиране"

<u>**Ротация на образ с малък ъгъл**</u> θ - $\cos\theta \approx 1$

$$x' = x - y.\sin\theta$$

$$y' = x.\sin\theta + y$$

Изискват се 2 операции "умножение" и 2 "събиране", но образът се изражда. Затова:

$$x' = x - y.\sin\theta$$

$$y' = x'.\sin\theta + y = (x - y.\sin\theta)\sin\theta + y = x.\sin\theta + y.(1 - \sin^2\theta)$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & 1-\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

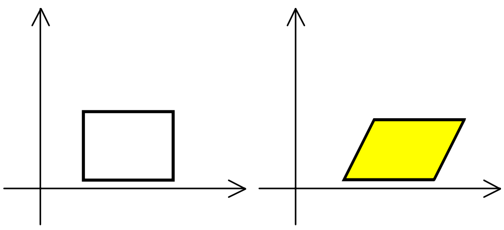
Тогава $\begin{Vmatrix} 1 & -\sin\theta \\ \sin\theta & 1-\sin^2\theta \end{Vmatrix} = 1$ и няма промяна на образа.

5. Други трансформации

5.1 Еластични деформации (Shear)

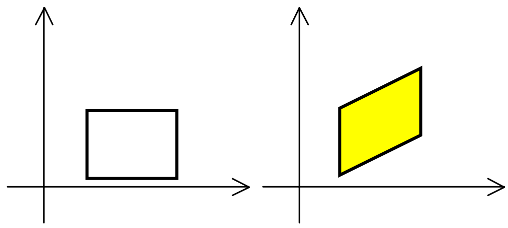
- По оста X с коефициент на еластична деформация a:

$$Sh_x = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad P' = Sh_x.P = \begin{bmatrix} x + a.y \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$



- По оста Y с коефициент на еластична деформация b:

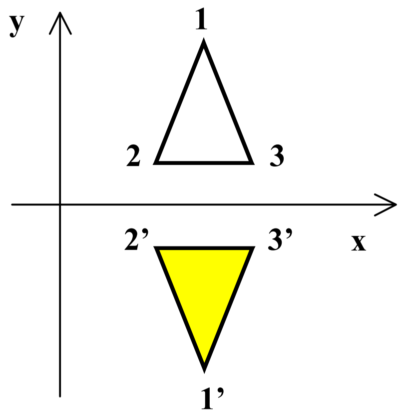
$$Sh_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P' = Sh_y.P = \begin{bmatrix} x \\ y + bx \\ 1 \end{bmatrix}$$



5.2 Огледални образи

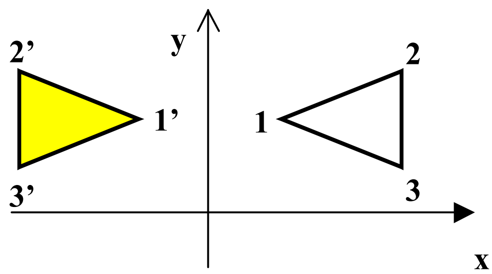
- Спрямо оста X:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



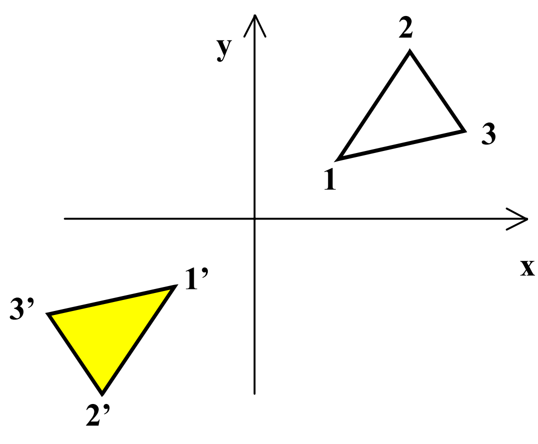
- Спрямо оста Y:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



- Спрямо началото на координатната система (еквивалентно на ротация около т.О с ъгъл 180^o)

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



- Спрямо точка P (еквивалентно на ротация около точка P с ъгъл 180^o)
- Спрямо произволна права:
    - Правата се пренася така, че да минава през т.О
    - Правата се ротира така, че да съвпадне с една от осите, например оста Х
    - Намира се огледалният образ спрямо избраната ос
    - Изпълнява се обратна ротация
    - Изпълнява се обратна транслация