К У Р С О В И   З А Д А Н И Я

по

ВЕРОЯТНОСТИ и СТАТИСТИКА

/ с решени примери/

АВТОР:
ДРАГО ЙОРДАНОВ МИХАЛЕВ

Задача 1. Колко четирицифрени числа могат да се напишат, ако знаете, че участвуват само цифрите 1, 2.

Решение:

Броят на четирицифрените числа, които могат да се запишат с цифрите 1, 1 , 1 , 2 се изразява с равенството:

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$$

Аналогично, броят на четирицифрените числа, които могат да се запишат с цифрите 1, 2, 2 , 2 се изразява с равенството:

$$C_4^3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$$

Броят на четирицифрените числа, които могат да се запишат с цифрите 1, 1 , 2 , 2 се изразява с равенството:

$$C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$$

Следователно, броят на четирицифрените числа, в които участват само цифрите 1, 2 е равен на 4 + 4 + 6 = 14

Задача 2. Произведени са 10 изделия от завод А, 5 изделия от завод Б и 15 изделия от завод В, като дефектните са 2 изделия от завод А, 1 изделие от завод Б и 4 изделия от завод В. На изложба е представено едно изделие, което се оказало дефектно. Каква е вероятността то да е произведено в завод А?

Решение:

Да означим събитията

$Д$ = {Представеното изделие е дефектно}

$Д_А$ = {Представеното изделие е от завод А}

$Д_Б$ = {Представеното изделие е от завод Б}

$Д_В$ = {Представеното изделие е от завод В}

Пресмятаме вероятностите:

$$P(Д_А) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3},\ P(Д_Б) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6},\ P(Д_В) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$$

$$P(Д \mid Д_А) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5},\ P(Д \mid Д_Б) = \frac{1}{5},\ \ P(Д \mid Д_В) = \frac{4}{15}$$

Заместваме във формулата за пълна вероятност:

$$P(Д) = P(Д_А).P(Д \mid Д_А) + P(Д_Б).P(Д \mid Д_Б) + P(Д_В).P(Д \mid Д_В)$$

Получаваме:

$$P(Д) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{15} = \frac{1}{15} + \frac{1}{30} + \frac{4}{30} = \frac{7}{30}$$

За да пресметнем апосериорната вероятност $P(Д_А \mid Д)$ (при условие, че е представено дефектно изделие, то да е от завод А), ще използваме формулата на Бейс, приложена за конкретния случай, и от горните пресмятания получявяме:

$$P(Д_А \mid Д) = \frac{P(Д_А)P(Д \mid Д_А)}{P(Д)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5}}{\frac{7}{30}} = \frac{1}{15} \cdot \frac{30}{7} = \frac{2}{7}$$

Задача 3. Дадени са данните 12, 16, 17, 21, 19, 28, 29, 32, 41, 32, 23, 26, 26, 21, 43, 44, 18, 41 30, 31, 25, 41, 21. Да се определи $\bar{x}$, Me, Mo.

Решение:

За да пресметнем ***средната аритметична величина*** ще използваме следната формула:

$$(1) \qquad \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N},$$

където:

$x_1, x_2, ..., x_N$ са индивидуалните значения на признака;

N – брой на наблюдаваните единици.

Като използваме формула (1) за данните от задачата получаваме:

$$\bar{x} = \frac{12+16+17+...+21}{23} = \frac{636}{23} = 27,65.$$

Медианата е числовата стойност, която разделя вариационния ред на две равни части. Тъй като нашият вариационен ред съдържа 23 члена (нечетен брой), то номерът на единицата, носеща медианното значение е равен на $\frac{23+1}{2} = 12$.

Медианата намираме, като първо подредим вариационният ред по големина, т.е

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
X	12	16	17	18	19	21	21	21	23	25	25	26	28	29	30	31	32	32	41	41	41	43	44

Единицата с № 12 е $Me = X_{12} = 25$.

Модата е числова стойност на вариационния ред, имаща най-голяма абсолютна честота. Тя е средна величина на гъстотата. В нашия случай с най-много повторения (3) са числата 21 и 41, т.е. разпределението е бимодално (има две моди).

$Mo_1 = 21$, $Mo_2 = 41$

Задача 4. Дадени са данните 20, 12, 26, 23, 17, 19, 28, 25, 29, 23, 29, 32, 41, 32, 23, 44, 26, 21, 43, 45, 18, 46, 30, 31, 25, 48, 29, 22, 36, 37.. Да се определи $\bar{x}$, Me, Mo.

Решение:

За да пресметнем ***средната аритметична величина*** ще използваме следната формула:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N}, \qquad (1)$$

където:

$x_1, x_2, ..., x_N$ са индивидуалните значения на признака;

N – брой на наблюдаваните единици.

Като използваме формула (1) за данните от задачата получаваме:

$$\bar{x} = \frac{20 + 12 + 26 + ... + 37}{30} = \frac{880}{30} = 29{,}33 .$$

Медианата е числовата стойност, която разделя вариационния ред на две равни части. Тъй като нашият вариационен ред съдържа 30 члена (четен брой), то медианата е равна на полусбора на двата средни члена, т.е. $Me = \frac{X_{15} + X_{16}}{2}$

Медианата намираме, като първо подредим вариационният ред по големина, т.е

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
X	12	17	18	19	20	21	22	23	23	23	25	25	26	26	28	29	29	29	30	31	32	32	36	37	41	43	44	45	46	48

$$Me = \frac{X_{15} + X_{16}}{2} = \frac{28 + 29}{2} = \frac{57}{2} = 28{,}5$$

Модата е числова стойност на вариационния ред, имаща най-голяма абсолютна честота. Тя е средна величина на гъстотата. В нашия случай с най-много повторения (3) са числата 23 и 29, т.е. разпределението е бимодално (има две моди).

$Mo_1 = 23$, $Mo_2 = 29$

Задача 5. Дадени са данните 20, 17, 19, 28, 25, 29, 29, 32, 41, 32, 23, 44, 26, 21, 43, 45, 18, 46, 30, 31, 25, 47, 29, 22, 36, 37. Да се групират в 5 групи и да се определи $\bar{x}$, Ме, Мо.

Решение:

Определяме ширината на интервала по формулата:

$$\textbf{\textit{Ширина на интелвала}} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{\textit{Брой групи}} = \frac{47-17}{5} = \frac{30}{5} = 6 \text{, където:}$$

x_{max} – максималното значение на признака;

x_{min} – минималното значение на признака;

Таблица 1. Работна таблица за изчисляване на средна аритметична, медиана и мода

№ група	**Интервал**	**Честота**	**Среди на интервалите**		**Кумулативен брой**	**Кумулативен брой (%)**
i		***f_i***	***X_i***	$\sum X_i f_i$	***C_i***	***C_i (%)***
1	17 - 22	6	19.5	117	6	23%
2	23 - 28	5	25.5	127.5	11	42%
3	29 - 34	7	31.5	220.5	18	69%
4	35 - 40	2	37.5	75	20	77%
5	41 - 47	6	44	264	26	100%
	Общо:	**26**		**804**		

Средна аритметична величина:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i . f_i}{\sum_{i=1}^{5} f_i} = \frac{804}{26} = 30{,}923$$

Медиана:

Медианата при интервален ред изчисляваме по формулата:

$$M_e = L_{Me} + (N_{Me} - C_{Me-1}) \cdot \frac{h}{f_{Me}},$$

където

L_{Me}- е стойността на долната граница на медианния интервал;

C_{Me-1} - е стойността на кумулативната честота в предмедианния интервал;

h - е ширината на медианния интервал;

f_{Me}- е честотата на медианния интервал;

$N_{Me} = \frac{n+1}{2}$ - номерът на единицата, носеща медианното значение.

Медианият интервал ще бъде 29 – 34, тъй като в него, съгласно колоната за кумулативни честоти, се намира междиното $\frac{26+1}{2} = 13,5$ значения. Конкретната числова стойност на медианата е равна на:

$$M_e = 29 + (13,5 - 11) \cdot \frac{6}{7} = 29 + 2,5 \cdot \frac{6}{7} = 29 + \frac{15}{7} = 31,14$$

Мода:

$$Mo = L_{Mo} + \frac{(f_{Mo} - f_{Mo-1}).h}{(f_{Mo} - f_{Mo-1}) + (f_{Mo} - f_{Mo+1})}$$, където:

L_{Mo} – долна граница на модалния интервал;

h – ширина на модалния интервал;

f_{Mo+1} – честота в следмодалния интервал;

f_{Mo-1} – честота в предмодалния интервал;

f_{Mo} – честота в модалния интервал.

Модалният интервал ще бъде 29 – 34, тъй като в него има най-голямо натрупване. Конкретната числова стойност на модата е равна на:

$$Mo = 29 + \frac{(7-5).6}{(7-5)+(7-2)} = 29 + \frac{12}{7} = 30,71$$

Задача 6. Намерете коефициента на корелация r.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	2	3	4	1	2	3	3	2	1	0

Решение:

Работна таблица за изчисляване коефициента на корелация.

№	X_i	Y_i	$X_i - \overline{X}$	$Y_i - \overline{Y}$	$\left(X_i - \overline{X}\right)^2$	$\left(Y_i - \overline{Y}\right)^2$	$\left(X_i - \overline{X}\right)\left(Y_i - \overline{Y}\right)$
1	-4	2	-4.5	-0.1	20.25	0.01	0.45
2	-3	3	-3.5	0.9	12.25	0.81	-3.15
3	-2	4	-2.5	1.9	6.25	3.61	-4.75
4	-1	1	-1.5	-1.1	2.25	1.21	1.65
5	0	2	-0.5	-0.1	0.25	0.01	0.05
6	1	3	0.5	0.9	0.25	0.81	0.45
7	2	3	1.5	0.9	2.25	0.81	1.35
8	3	2	2.5	-0.1	6.25	0.01	-0.25
9	4	1	3.5	-1.1	12.25	1.21	-3.85
10	5	0	4.5	-2.1	20.25	4.41	-9.45
Общо:	**5**	**21**			**82.5**	**12.9**	**-17.5**
Средно аритметично:	$\overline{X}$ **= 0.5**	$\overline{Y}$ **= 2.1**					

Пресмятаме коефициента на корелация по формулата:

$$r_{XY} = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum (X_i - \overline{X})^2 . \sum (Y_i - \overline{Y})^2}} = \frac{-17.5}{\sqrt{82.5 \cdot 12.9}} = \frac{-17.5}{32.62} = -0.54$$

Задача 7. Намерете уравнението на линейна регресия за зависимост на у от х за даните.

Х	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
У	-2	-1	0	1	2	3	3	5	6	7

Решение:

Работна таблица:

№	**X_i**	**$У_i$**	**$X_i.Y_i$**	**X_i^2**
1	-4	-2	8	16
2	-3	-1	3	9
3	-2	0	0	4
4	-1	1	-1	1
5	0	2	0	0
6	1	3	3	1
7	2	3	6	4
8	3	5	15	9
9	4	6	24	16
10	5	7	35	25
Общо:	**5**	**24**	**93**	**85**

$$\beta_1 = \frac{n\sum X_i Y_i - \sum X_i \sum Y_i}{n\sum X_i^2 - \left(\sum X_i\right)^2} = \frac{10.93 - 5.24}{10.85 - 5^2} = \frac{810}{825} \approx 0,98$$

$$\overline{X} = \frac{\sum X_i}{n} = \frac{5}{10} = 0,5 \qquad \overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{24}{10} = 2,4$$

$$\beta_0 = \overline{Y} - \beta_1.\overline{X} = 2,4 - 0,98.0,5 = 1,91$$

$$Y = \beta_0 + \beta_1.X \quad \Rightarrow \quad Y = 1,91 + 0,98.X$$

Задача 8. Случайна величина X има разпределение N (m, 1). Известни са 36 наблюдения, като $\overline{x}$ =30. Намерете 95% доверителен интервал за m.

Решение:

Случайна величина X има нормално разпределение със средно квадратично отклонение $\sigma = 1$ и неизвестно математическо очакване m.

Гаранционният множител, тъй като броят на наблюденията е по-голям от 30 се определя по таблицата за стойностите на функцията при нормално разпределение (площите под нормалната крива). При възприета гаранционна вероятност 95 %, той възлиза на 1, 96, т.е. $z_\gamma = 1{,}96$.

Пресмятаме точността (ε) на оценката $\overline{x}$ по формулата:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\gamma = \frac{1}{\sqrt{36}} \cdot 1{,}96 = \frac{1{,}96}{6} \approx 0{,}33$$

Следователно търсеният доверителен интервал е:

[$\overline{x}$ - 0,33 ; $\overline{x}$ + 0,33] = [30 - 0,33 ; 30 + 0,33] = [29,67 ; 30,33]

Задача 9. Случайна величина X има разпределение N (m, 1). Известни са 25 наблюдения, като $\overline{x}$ =30. Намерете 95% доверителен интервал за m.

Решение:

Случайна величина X има нормално разпределение със средно квадратично отклонение $\sigma = 1$ и неизвестно математическо очакване m.

Гаранционният множител, тъй като броят на наблюденията е по-малък от 30 се определя по таблицата за разпределението на Стюдънт (t-разпределение). При възприета гаранционна вероятност 95 % и степени на свобода 25 -1 = 24, той възлиза на 2,064, т.е. $t_\gamma = 2,064$.

Пресмятаме точността (ε) на оценката $\overline{x}$ по формулата:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_\gamma = \frac{1}{\sqrt{25}} \cdot 2,064 = \frac{2,064}{5} \approx 0,4128$$

Следователно търсеният доверителен интервал е:

[$\overline{x}$ - 0,4128 ; $\overline{x}$ + 0,4128] = [30 - 0,4128 ; 30 + 0,34128] = [29,5872 ; 30,4128]

Задача 10. Разпределението на 140 живущи в даден жилищен блок по петгодишни възрастови групи е следното:

Възраст	**Брой живущи**
Под 24	7
25 - 29	30
30 - 34	43
35 - 39	22
40 - 44	15
45 - 49	11
50 - 54	9
Над 55	3
Общо:	**140**

Съставете таблица на честотното разпределение, постройте хистограма на разпределението и изчислете средната възраст на живущите в жилищния блок.

Решение:

Абсолютна честота – броят на единиците f_i , притежаващи дадено значение признака X_i . Сумата на честотите от всички групи е равна на общия брой на наблюдаваните единици n.

Относителната честота p_i се получава на база на абсолютната, представена в процентно изражение спрямо общия брой на случаите:

$$p_i = \frac{f_i}{\sum_{i=1}^{8} f_i} = \frac{f_i}{n} \qquad \text{или} \qquad p_i(\%) = \frac{f_i}{n} \cdot 100 \qquad \text{за } i = 1, 2, \ldots, 8.$$

Кумулативна честота C_i – броят на единиците, които имат значения на признака по-малки или равни на определена стойност X_i . Получава се чрез сумиране (натрупване) на броя на единиците от началото на разпределението до текущата група:

$$C_i = \sum_{j=1}^{i} f_j \qquad \text{за } i = 1, 2, \ldots, 8.$$

Относителна кумулативна честота C_i (%):

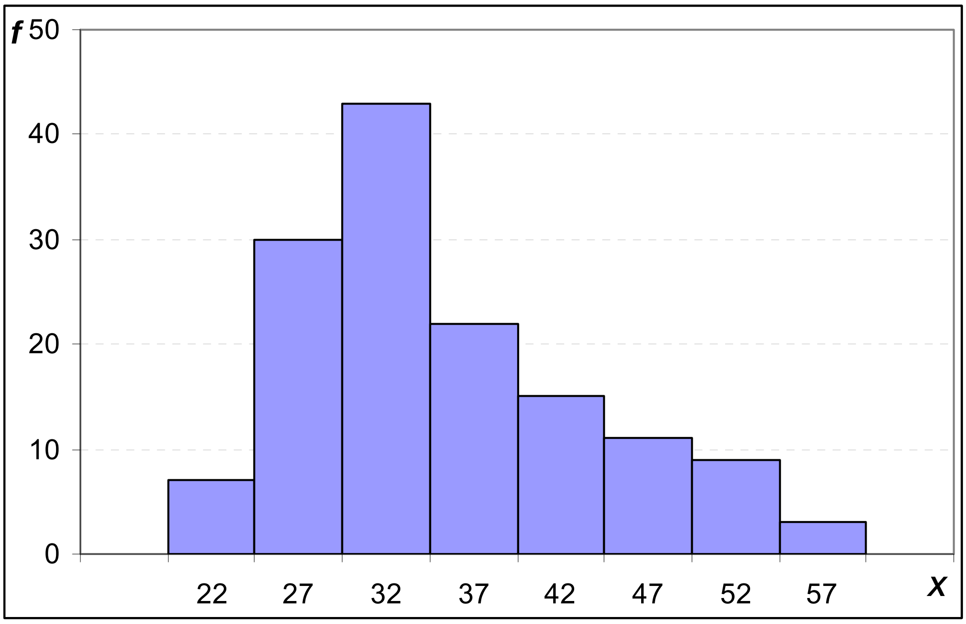
$$C_i(\%) = \frac{C_i}{n} \cdot 100 = \sum_{j=1}^{i} p_j(\%)$$

Таблица 1. Таблица на честотното разпределение

№ група	Възраст	Брой живущи	Относителен дял	Относителен дял (%)	Кумулативен брой	Кумулативен дял (%)
i		**f_i**	**p_i**	**p_i (%)**	**C_i**	**C_i (%)**
1	Под 24	7	0,050	5,00%	7	5,00%
2	25 - 29	30	0,214	21,43%	37	26,43%
3	30 - 34	43	0,307	30,71%	80	57,14%
4	35 - 39	22	0,157	15,71%	102	72,86%
5	40 - 44	15	0,107	10,71%	117	83,57%
6	45 - 49	11	0,079	7,86%	128	91,43%
7	50 - 54	9	0,064	6,43%	137	97,86%
8	Над 55	3	0,021	2,14%	140	100,00%
Общо:		**140**	**1,000**	**100,00%**		

При интервална статистическа групировка, средите на интервалите се определят като значения за съответните групи. Графичното представяне на този вид честотни разпределения става чрез хистограма.

Фигура 1. Хистограма на разпределението



Извод:

Най-голям брой живущи попадат в третата група – 43 живущи са на възраст между 30 и 34 години. Те съставляват 30,71% от наблюдаваната съвкупност. Нещо повече, 57,14% от живущите са на възраст по- малка или равна на 34 години, а останалите над 34 години, като само 2,14% са над 55 години

Ще определим средната възраст на живущите чрез:

- *Средна аритметична величина;*
- *Медиана;*
- *Мода.*

Таблица 2. Работна таблица за изчисляване на средна аритметична, медиана и мода

№ група	**Възраст**	**Среди на интервалите**	**Брой живущи**		**Кумулативен брой**	**Кумулативен брой (%)**
i		X_i	f_i	$\sum X_i f_i$	C_i	C_i ***(%)***
1	Под 24	22	7	154	7	5,00%
2	25 - 29	27	30	810	37	26,43%
3	30 - 34	32	43	1376	80	57,14%
4	35 - 39	37	22	814	102	72,86%
5	40 - 44	42	15	630	117	83,57%
6	45 - 49	47	11	517	128	91,43%
7	50 - 54	52	9	468	137	97,86%
8	Над 55	57	3	171	140	100,00%
Общо:			**140**	**4940**		

- Средна възраст на живущите като средна аритметична величина:

Понеже честотата f_i е различна за различните интервали на възрастта, пресмятаме като претеглена средна аритметична величина.

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{8} X_i \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{8} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{8} X_i \cdot f_i}{n} = \frac{4940}{140} = 35{,}286 \, ,$$

където:

$\overline{X}$ – средна аритметична величина;

X_i - средите на интервалите;

f_i - е честотата в интервалите - броя живущи за интервала.

- Медианата при интервален ред изчисляваме по формулата:

$$M_e = L_{Me} + (N_{Me} - C_{Me-1}) \cdot \frac{h}{f_{Me}},$$

където

L_{Me}- е стойността на долната граница на медианния интервал;

C_{Me-1} - е стойността на кумулативната честота в предмедианния интервал;

h - е ширината на медианния интервал;

f_{Me}- е честотата на медианния интервал;

$N_{Me} = \frac{n+1}{2}$ - номерът на единицата, носеща медианното значение.

Медианния интервал е интервала, в който попада N_{Me}.

За медианата получаваме:

$$M_e = 30 + (70{,}5 - 37) \cdot \frac{5}{43} = 30 + 3{,}895 = 33{,}895$$

- Средната възраст чрез модата пресмятаме по формулата:

$$M_O = L_{Mo} + \frac{(f_{Mo} - f_{Mo-1}) \cdot h}{(f_{Mo} - f_{Mo-1}) + (f_{Mo} - f_{Mo+1})},$$

където:

L_{Mo}- е стойността на долната граница на модалния инервал;

f_{Mo}- е честотата в модалния интервал;

f_{Mo-1}- е честотата в предмодалния интервал;

f_{Mo+1}- е честотата в следмодалния интервал;

h - е ширината на интервала.

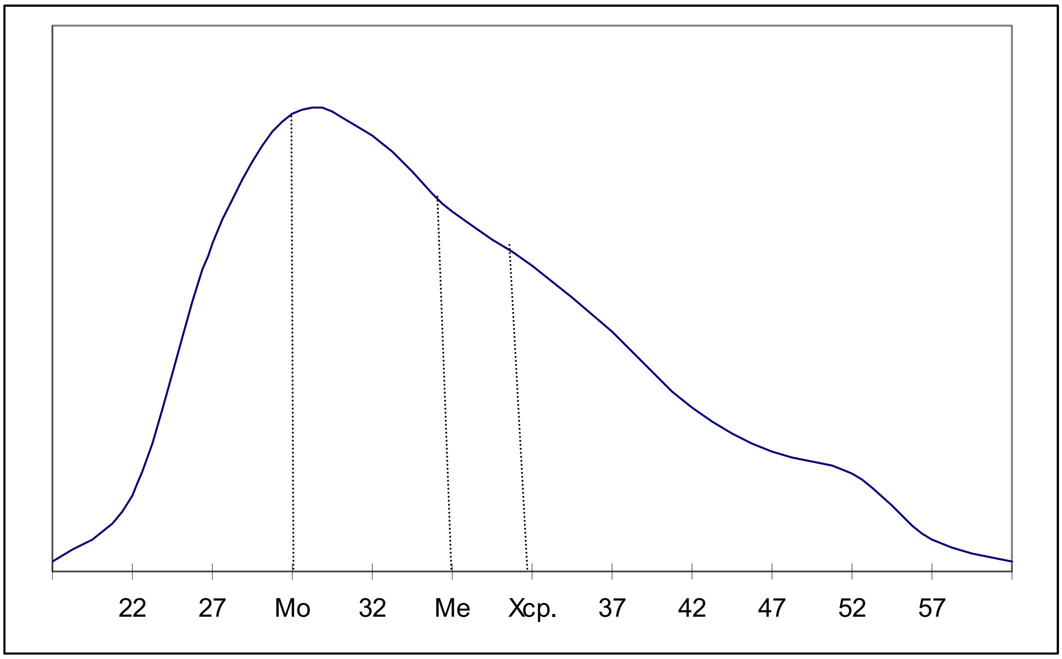
Модален интервалът е този, в който честотата приема най-висока стойност. В случая това е интервалът, в който f = 43.

За модата получаваме:

$$M_O = 30 + \frac{(43-30)\cdot 5}{(43-30)+(43-22)} = 30 + \frac{65}{34} = 30 + 1{,}912 = 31{,}912$$

Поради наличието на една мода разпределението е едномодално.

Фигура 2. Асиметрично разпределение с дясно рамо



Извод:

Стойностите на средно претеглената , на медианата и на модата са близо и между тях съществуват неравенствата $M_o < M_e <$ Хср.$=\overline{X}$, което означава, че разпределението е дясно асиметрично.

Задача 11. Въз основа на следните данни за оценките на 70 студенти от един поток на семестриалния им изпит по дисциплината Статистика съставете таблица на честотното разпределение и изчислете средния им успех по дисциплината.

Оценка	**Брой студенти**
2	4
3	12
4	30
5	19
6	5
Общо:	**70**

Решение:

Абсолютна честота – броят на единиците f_i , притежаващи дадено значение признака X_i . Сумата на честотите от всички групи е равна на общия брой на наблюдаваните единици n.

Относителната честота p_i се получава на база на абсолютната, представена в процентно изражение спрямо общия брой на случаите:

$$p_i = \frac{f_i}{\sum_{i=1}^{5} f_i} = \frac{f_i}{n} \qquad \text{или} \qquad p_i(\%) = \frac{f_i}{n} \cdot 100 \qquad \text{за } i = 1, 2, \ldots, 5.$$

Кумулативна честота C_i – броят на единиците, които имат значения на признака по-малки или равни на определена стойност X_i . Получава се чрез сумиране (натрупване) на броя на единиците от началото на разпределението до текущата група:

$$C_i = \sum_{j=1}^{i} f_j \qquad \text{за } i = 1, 2, \ldots, 5.$$

Относителна кумулативна честота C_i (%):

$$C_i(\%) = \frac{C_i}{n} \cdot 100 = \sum_{j=1}^{i} p_j(\%)$$

Таблица 1. Таблица на честотното разпределение

№ група	Оценка	Брой студенти	Относителен дял	Относителен дял (%)	Кумулативен брой	Кумулативен брой (%)
i	X_i	f_i	p_i	p_i (%)	C_i	C_i (%)
1	2	4	0,057	5,71%	4	5,71%
2	3	12	0,171	17,14%	16	22,86%
3	4	30	0,429	42,86%	46	65,71%
4	5	19	0,271	27,14%	65	92,86%
5	6	5	0,071	7,14%	70	100,00%
Общо:		**70**	1,000	100,00%		

Изводи:

Най-голям брой студенти попадат в третата група – 30 студента са получили оценка 4. Те съставляват 42,86% от наблюдаваната съвкупност. Нещо повече, 65,71% от студентите са изкарали оценка по- малка или равна на 4, а останалите оценка над 4 години, като само 7,14% са изкарали отлична оценка.

Ще определим средният успех на студентите чрез:

- *Средна аритметична величина;*
- *Медиана;*
- *Мода.*

Таблица 2. Работна таблица за изчисляване на средна аритметична

Оценка	Брой студенти	
X_i	f_i	$X_i \cdot f_i$
2	4	8
3	12	36
4	30	120
5	19	95
6	5	30
Общо:	**70**	**289**

- Средна оценка като средна аритметична величина:

Понеже честотата f_i е различна за различните оценки, пресмятаме като претеглена средна аритметична величина.

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{8} X_i \cdot f_i}{\sum_{i=1}^{8} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{8} X_i \cdot f_i}{n} = \frac{289}{70} = 4{,}13\,,$$

където:

$\overline{X}$ – средна аритметична величина;

X_i - значение признака;

f_i - е абсолютната честотата.

- Медиана

$M_e = 4$

- Средната възраст чрез модата пресмятаме по формулата:

$M_O = 4$

Задача 12. Дадени са следните данни за общо разстояние в км., изминато от всеки от служители на дадена компанията.

3300	4200	4500	4000	3800
3200	3100	3800	4100	4200
3700	2800	4100	3300	5000
3600	4400	4200	3000	3400
3500	4000	3800	2900	2500
4000	3300	3400	2200	3100
3900	4400	3600	3700	4600
4300	3900	3100	3700	4800
3400	3200	3000	5100	3400
3500	2700	4800	3800	4100

1. Пресметнете средната аритметична непретеглена величина, медианата и модата.
2. Групирайте данните и пресметнете средната аритметична величина, медианата и модата.
3. Съставете таблица на честотното разпределение.
4. За негрупираните данни пресметнете средно аритметично (линейно) отклонение, дисперсията и стандартното отклонение.
5. Намерете доверителен интервал за средното разстояние, което изминват за 1 месец търговските пътници, при гаранционна вероятност 0,9 .
6. Проверете съществува ли статистически значима разлика между средната за генералната съвкупност и извадковата средна с риск за грешка от първи род α = 0,05.

Решение:

1)

Таблица 1. Общо разстояние в км., изминато от всеки от $50^{\text{-те}}$ служители на компанията

3300	4200	4500	4000	3800
3200	3100	3800	4100	4200
3700	2800	4100	3300	5000
3600	4400	4200	3000	3400
3500	4000	3800	2900	2500
4000	3300	3400	2200	3100
3900	4400	3600	3700	4600
4300	3900	3100	3700	4800
3400	3200	3000	5100	3400
3500	2700	4800	3800	4100

За да пресметнем ***средната аритметична непретеглена величина*** ще използваме следната формула:

(1) $$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_N}{N},$$

където:

$x_1, x_2, ..., x_N$ са индивидуалните значения на признака;

N – брой на наблюдаваните единици.

Като използваме формула (1) за данните от таблица 1 получаваме:

$$\bar{x} = \frac{3300 + 3200 + ... + 4100}{50} = \frac{185\,400}{50} = 3\,708$$

Медианата е числовата стойност, която разделя вариационния ред на две равни части. Тъй като нашият вариационен ред съдържа 50 члена (четен брой), то медианата е равна на полусбора на двата средни члена, т.е.

$$Me = \frac{3700 + 3700}{2} = 3\,700$$

Модата е числова стойност на вариационния ред, имаща най-голяма абсолютна честота. Тя е средна величина на гъстотата. В нашия случай с най-много повторения е числото 3 400.

$$Mo = 3\,400$$

2)

2.1) ***Брой групи*** = min (20; 1 + 3,322*lg50) = min(20; 6,7) = 7

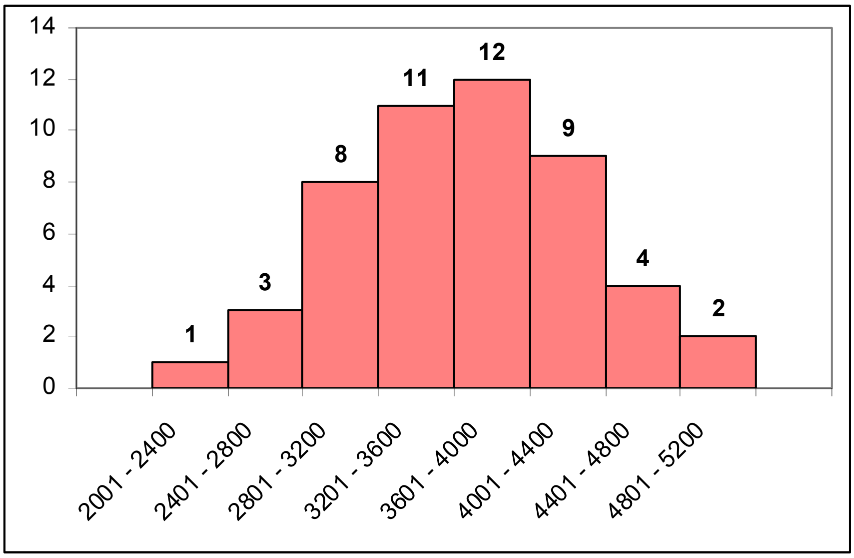
2.2) ***Ширина на интелвала*** = $\frac{x_{\max} - x_{\min}}{Брой\ групи} = \frac{5100 - 2200}{7} \approx 400$, където:

x_{max} – максималното значение на признака;
x_{min} – минималното значение на признака;

2.3) Таблично представяне на честотното разпределение:

Група	Честота	Отн. честота
2001 - 2400	1	2,0%
2401 - 2800	3	6,0%
2801 - 3200	8	16,0%
3201 - 3600	11	22,0%
3601 - 4000	12	24,0%
4001 - 4400	9	18,0%
4401 - 4800	4	8,0%
4801 - 5200	2	4,0%
Общо:	**50**	**100,0%**

2.4) Хистограма на честотното разпределение:



2.5) За пресмятането на извадковите характеристики, ще използваме следната помощна таблица:

Разстояние	**Брой пътници**	**Среди на интервалите**	**Произведение на средите на интервалите и честотите**	**Кумулативни честоти**
	f_i	x_i	$x_i \cdot f_i$	c_i
2001 - 2400	1	2 200	2 200	1
2401 - 2800	3	2 600	7 800	4
2801 - 3200	8	3 000	24 000	12
3201 - 3600	11	3 400	37 400	23
3601 - 4000	12	3 800	45 600	35
4001 - 4400	9	4 200	37 800	44
4401 - 4800	4	4 600	18 400	48
4801 - 5200	2	5 000	10 000	50
Общо:	**50**		**183 200**	

Средна аритметична величина:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{7} x_i . f_i}{\sum_{i=1}^{7} f_i} = \frac{183\,200}{50} = 3\ 664$$

Медиана:

$$Me = L_{Me} + (\frac{\sum_i f_i}{2} - c_{Me-1})\frac{e}{f_{Me}}$$ **, където:**

L_{Me} – долна граница на медианния интервал;
C_{Me} – кумулативни честоти в предмедиания интервал;
е – ширина на медиания интервал;
f_{Me} – честота в медиания интервал.

Медианият интервал ще бъде 3601 – 4000, тъй като в него, съгласно колоната за кумулативни честоти, се намира междиният 25 – ти пътник. Конкретната числова стойност на медианата е равна на:

$$Me = 3601 + (\frac{50}{2} - 23)\frac{400}{12} \approx 3\,668$$

Мода:

$$Mo = L_{Mo} + \frac{(f_{Mo} - f_{Mo-1}).e}{(f_{Mo} - f_{Mo-1}) + (f_{Mo} - f_{Mo+1})}$$ **, където:**

L_{Mo} – долна граница на модалния интервал;
е – ширина на модалния интервал;
f_{Mo+1} – честота в следмодалния интервал;
f_{Mo-1} – честота в предмодалния интервал;
f_{Mo} – честота в модалния интервал.

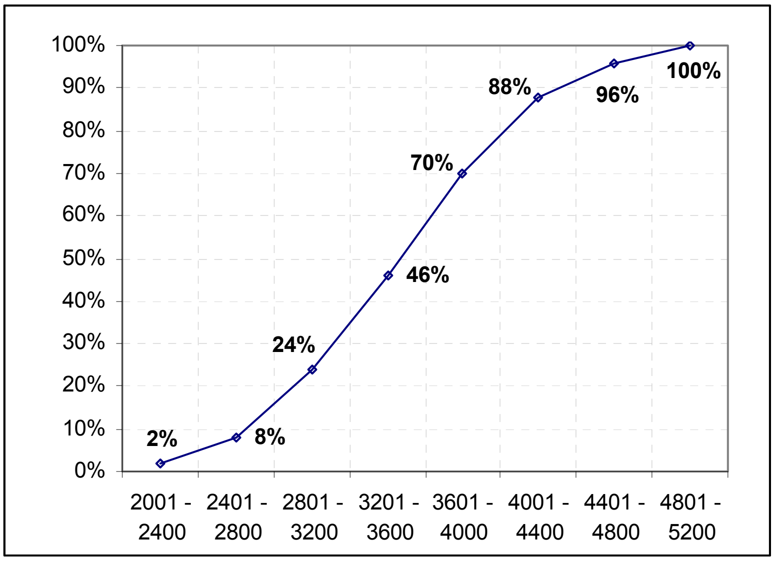
Модалният интервал ще бъде 3601 – 4000, тъй като в него има най-голямо натрупване. Конкретната числова стойност на модата е равна на:

$$Mo = 3601 + \frac{(12-11).400}{(12-11)+(12-9)} = 3\,701$$

3)

Групи	Относителни честоти	Кумулативни честоти	Относителни честоти (%)	Кумулативни честоти (%)
2001 - 2400	1	1	2%	2%
2401 - 2800	3	4	6%	8%
2801 - 3200	8	12	16%	24%
3201 - 3600	11	23	22%	46%
3601 - 4000	12	35	24%	70%
4001 - 4400	9	44	18%	88%
4401 - 4800	4	48	8%	96%
4801 - 5200	2	50	4%	100%
Общо:	**50**		**100%**	

Полигон на относителното кумулативно честотно розпределение



50% от служителите изминават на месец не повече от 3700 км.

4) Ще използваме следната помощна таблица:

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$\lvert x_i - \overline{x}\rvert . f_i$	$(x_i - \overline{x})^2 . f_i$
2200	1	2200	1508	2274064
2500	1	2500	1208	1459264
2700	1	2700	1008	1016064
2800	1	2800	908	824464
2900	1	2900	808	652864
3000	2	6000	1416	1002528
3100	3	9300	1824	1108992
3200	2	6400	1016	516128
3300	3	9900	1224	499392
3400	4	13600	1232	379456
3500	2	7000	416	86528
3600	2	7200	216	23328
3700	3	11100	24	192
3800	4	15200	368	33856
3900	2	7800	384	73728
4000	3	12000	876	255792
4100	3	12300	1176	460992
4200	3	12600	1476	726192
4300	1	4300	592	350464
4400	2	8800	1384	957728
4500	1	4500	792	627264
4600	1	4600	892	795664
4800	2	9600	2184	2384928
5000	1	5000	1292	1669264
5100	1	5100	1392	1937664
Общо:	**50**	*185400*	*25616*	*20116800*
	$\overline{x} =$	**3708**	**512,32**	**402336**
				634,2996

4.1) **Средно аритметично (линейно) отклонение:**

$$\delta = \frac{\sum |x_i - \overline{x}|.f_i}{\sum f_i} = \frac{25616}{50} \approx 512$$

4.2) **Дисперсия:**

$$D = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2 .f_i}{\sum f_i} = \frac{20116800}{50} = 402336$$

4.3) **Стандартно токлонение:**

$$\sigma = \sqrt{D} = \sqrt{402336} \approx 634$$

5)

Оценка на стандартното отклонение на даден параметър за съвкупността се пресмята по формулата на Бесел:

$$\sigma'_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum (x' - \overline{x})^2 f'}{n-1}} = \sqrt{\frac{20116800}{49}} \approx 640{,}74$$

Стандартната грешка на оценката е равна на:

$$\mu_{\bar{x}} = \frac{\sigma'_{\bar{x}}}{\sqrt{n}} = \frac{640.74}{\sqrt{50}} \approx 90{,}6$$

Гаранционния множител, определен по таблицата за стойностите на функцията на нормално разпределение при възприета гаранционна вероятност 0,9 възлиза на 1,65.

Максималният размер на грешката се определя като произведение от стандартната грешка на оценката и гаранционнея множител, и в конкретния случай е равна на:

$$\Delta\overline{x} = 1{,}65.90{,}6 \approx 149{,}51$$

Доверителният интервал за средното разстояние, което изминват за 1 месец търговските пътници, при гаранционна вероятност 0,9 е равен на:

$$\overline{x}' - \Delta\overline{x} \le \overline{x} \le \overline{x}' + \Delta\overline{x}$$
$$3708 - 150 \le \overline{x} \le 3708 + 150$$
$$3558 \le \overline{x} \le 3858$$

6)

Първо ще дефинираме нуливата и алтернативната хипотеза. Нулевата хипотеза гласи, че не съществува статистически значима разлика между средната за генералната съвкупност и извадковата средна, т.е. H_0: $\overline{x} = \overline{x}'$. Алтернативната хипотеза е H_1: $\overline{x} < \overline{x}'$.

Второ – определяне на рискът за грешка от първи род, т.е. рискът да се отхвърли нулевата хипотеза, когато тя е вярна. В задачата се изисква да се работи с един сравнително малък риск за грешка от първи род α = 0,05.

Трето – определяне на методът за проверка. Извадката е сравнително малка по обем и следователно ще използваме t- характеристиката, която се изчислява по формулата:

$$Z_{EM} = \frac{|\overline{x} - \overline{x}'|}{\frac{\sigma'}{\sqrt{n}}}$$

Заместваме в горната формула и получаваме:

$$Z_{EM} = \frac{|3500 - 3708|}{\frac{640,74}{\sqrt{50}}} = \frac{208.\sqrt{50}}{640.74} \approx 2.295 .$$

Четвърто – характерът на критичната област е едностранна.

Пето – определяне на теоретичната характеристика с помощта на таблицата на нормалното разпределението, която при зададените параметри е $Z_T = 1,96$.

Шесто – съпоставяне ня емпиричната и теоретична характеристика на оценката и вземане на решение за приемане или отхвърляне на нулевата хипотеза.

Имаме: $Z_{EM} > Z_T$ (2,295 > 1,96), което дава основание да се отхвърли нулевата хипотеза в полза на алтернативната.

Задача 13. Сравняваме мъже и жени на основата на техните резултати от даден тест. Предполагаме, че резултатът на жените е по-висок от този на мъжете. Имаме обемите, средноаритметичните стойности и стандартните отклонения на две извадки. Стойностите са дадени в следната таблицата:

Извадка	**Обем**	**Средноаритметична стойност**	**Стандартно отклонение**
Мъже	$n_1 = 10$	$M_1 = 51{,}2$	$SD_1 = 7{,}1$
Жени	$n_2 = 15$	$M_2 = 54{,}1$	$SD_2 = 8{,}2$

А) Какъв подходящ тест трябва да приложим за да установим дали резултатът на жените е по-висок от този на мъжете в генералните съвкупности?

Б) Направете теста при избрана вероятност за грешка $\alpha = 1$ %.

Решение:

А) Ще направим t –тест за две независими извадки.

Б) Нулевата хипотеза е, че по-високият резултат на жените в извадката е случаен, т.е. резултатите на мъжете и жените в генералните съвкупности са статистически равни. Алтернативната хипотеза е, че резултатите на жените са статистически по-високи от резултатите на мъжете в генералните съвкупности.

Нека $N_1(X_1,D_1)$ и $N_2(X_2,D_2)$ са теоретичните нормални разпределения на генералните съвкупности, съответно на мъжете и жените. Тогава:

$H_0: X_1 = X_2$

$H_1: X_1 < X_2$

Стандартната грешка на разликата от средните стойности на двете извадки се пресмята по формулата:

$$SE_{M_2-M_1} = \sqrt{\frac{(n_1-1)\cdot SD_1^2 + (n_2-1)\cdot SD_2^2}{(n_1+n_2-2)} \cdot \frac{n_1+n_2}{n_1\cdot n_2}}$$

Имаме:

$$SE_{M_2-M_1} = \sqrt{\frac{(10-1)\cdot 7{,}1^2 + (15-1)\cdot 8{,}2^2}{(10+15-2)} \cdot \frac{10+15}{10\cdot 15}} = \sqrt{\frac{34\,876{,}25}{3\,450}} \approx \sqrt{10{,}11} \approx 3{,}18$$

За проверяващата величина t_{obs} имаме:

$$t_{obs} = \frac{M_2 - M_1}{SE_{M_2-M_1}} = \frac{54{,}1-51{,}2}{3{,}18} \approx 0{,}912$$

От статистическата таблица за t-разпределението намираме зависещата от α и степените на свобода df „критична” стойност $t_{\alpha,df}$. За $\alpha = 1\%$ (при едностранна критична област) и $df = 10 + 15 - 2 = 23$ получаваме $t_{0,01,23} = 2{,}500$.

Сравняваме пресметнатата стойност за t_{obs} и „критична” стойност $t_{\alpha,df.}$ Тъй като $t_{obs} < 2{,}500$, приемаме нулевата хипотеза, т.е. със степен на надеждност 99 % можем да твърдим, че резултатите на мъжете и жените в генералните съвкупности са статистически равни.

Задача 14. Да се проучи ефективността от проведена учебна програма. Имаме случайна извадка от 10 ученика с резултати преди и след провеждането на програмата:

Ученик	**Резултати**	
№	**Преди програмата**	**След програмата**
1	0	2
2	1	2
3	1	4
4	2	3
5	4	3
6	3	3
7	4	6
8	2	4
9	1	4
10	4	4

А) Какъв подходящ тест трябва да приложим за да установим дали от програмата има ефект?

Б) Направете теста при избрана вероятност за грешка α = 5 %.

Решение:

А) Ще направим t –тест за две зависими извадки.

Б) Нулевата хипотеза е, че неизвестната средна разлика в генералната съвкупност ($\overline{\Delta}$) е нула, т.е. няма статистическа значима разлика между резултатите от двата теста. Алтернативната хипотеза е, че резултатите от теста след програмата са по-високи от тези преди програмата.

H_0: $\overline{\Delta} = 0$

H_1: $\overline{\Delta} < 0$

Нека с D_i да означим разликите от резултатите между двата теста. Тогава средната разлика може да се намери като средноаритметична величина по формулата:

$$\overline{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(X_i - Y_i) = -1{,}3$$

Помощна таблица:

Ученик	Резултати		Разлики между резултатите преди и след програмата	
№	**Преди програмата**	**След програмата**		
i	X_i	Y_i	$D_i = X_i - Y_i$	$(D_i - \overline{D})^2$
1	0	2	-2	0,49
2	1	2	-1	0,09
3	1	4	-3	2,89
4	2	3	-1	0,09
5	4	3	1	5,29
6	3	3	0	1,69
7	4	6	-2	0,49
8	2	4	-2	0,49
9	1	4	-3	2,89
10	4	4	0	1,69
			$\overline{D} = $ **-1,3**	$\sum =$ **16,10**

Оценката на стандартното отклонение се намира по формулата:

$$SD = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(D_i - \overline{D})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{16,10}{9}} = \sqrt{1,79} \approx 1,34$$

За стандартната грешка имаме:

$$SE = \frac{SD}{\sqrt{n}} = \frac{1,34}{\sqrt{10}} \approx 0,42$$

Емпиричната характеристика за проверка на хипотези се получава по формулата:

$$t_{obs} = \frac{\overline{D}}{SE} = \frac{-1,3}{0,42} \approx -3,074$$

От статистическата таблица за t-разпределението намираме зависещата от α и степените на свобода df „критична” стойност $t_{\alpha,df}$. За α =5% (при едностранна критична област) и df = 10 - 1 = 9 получаваме $t_{0,05,\,9}$ =1,833.

Сравняваме пресметната стойност за t_{obs} и „критична” стойност $t_{\alpha,df}$. Нулевата хипотеза се отхвърля защото $|t_{obs}| > 1,833$. Това означава, че разликата в резултатите между двата теста може да се счита за статистически значима, т.е. със степен на надеждност 95 % можем да твърдим, че въведената учебна програма е оказала нарастващо влияние върху резултатите от теста.

Задача 15. Дадена е таблица с конкретните данни (в брой изделия) за производителността на 5 оператора, които работят по случаен ротационен принцип на 5 машини.

		Оператор				
		I	**II**	**III**	**IV**	**V**
Машина	**A**	12	13	14	11	12
	B	14	15	12	12	15
	C	14	12	12	13	14
	D	15	13	14	12	12
	E	18	19	19	17	19

Да се пресметне общата девиация и девиацията по оператори и девиацията по машини.
Да се извърши проверка за влиянието на работата на операторите върху общата производителност на труда.
Да се извърши проверка за влиянието на работата на отделните машини върху общата производителност на труда

Решение:

		Оператор					$\bar{y}_{ai}$	$(\bar{y}_{ai}-\bar{y})^2$ -
		I	**II**	**III**	**IV**	**V**		
Машина	**A**	12	13	14	11	12	**12,4**	3,0
	B	14	15	12	12	15	**13,6**	0,3
	C	14	12	12	13	14	**13,0**	1,3
	D	15	13	14	12	12	**13,2**	0,8
	E	18	19	19	17	19	**18,4**	18,3
$\bar{y}_{bi}$		**14,6**	**14,4**	**14,2**	**13,0**	**14,4**	**14,1**	**23,6**
$(\bar{y}_{bi}-\bar{y})^2$		0,2	0,1	0,0	1,3	0,1	**1,6**	

Общото средно на всички наблюдавани величини се пресмята по формулата:

$$\bar{y} = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} y_{ij} = 14.1$$

Общата девиация на значенията на резултативния признак ще отбележим с Q. Тя се оценява по формулата:

$$Q = \sum_{i=1}^{5}\sum_{i=1}^{5}(y_{ij} - \bar{y})^2 = 146,6$$

Общата девиация се разлага на два компонента: междугрупова и вътрешногрупова девиация:

$$Q = Q_{\varepsilon} + Q_A + Q_B$$

Междугруповата девиация се оценява по формулата:

$$Q_A = 5\sum_{i=1}^{5}(\bar{y}_{ai} - \bar{y})^2 = 5.23,6 = 118,24$$

$$Q_B = 5\sum_{i=1}^{5}(\bar{y}_{bi} - \bar{y})^2 = 5.1,6 = 8,24$$

Вътрешногруповата девиация се оценява по формулата:

$$Q_\varepsilon = Q - Q_A - Q_B = 146{,}6 - 118{,}24 - 18{,}24 = 20{,}16$$

Междугруповата оценка на общата дисперсия се получава от междугруповата девиация по формулата:

$$\vartheta_A = 5 - 1 = 4 \qquad S_A^2 = \frac{Q_A}{\vartheta_A} = \frac{118{,}24}{4} = 29{,}56$$

$$\vartheta_B = 5 - 1 = 4 \qquad S_B^2 = \frac{Q_B}{\vartheta_B} = \frac{8{,}24}{4} = 7{,}39$$

Вътрешногруповата оценка на общата дисперсия се получава от вътрешногруповата девиация по формулата:

$$\vartheta = 5.5 - 1 = 24$$

$$\vartheta_\varepsilon = \vartheta - \vartheta_A - \vartheta_B = 24 - 4 - 4 = 16 \qquad S_\varepsilon^2 = \frac{Q_\varepsilon}{\vartheta_\varepsilon} = \frac{20{,}16}{16} = 1{,}26$$

За да установим, дали интерисуващатани връзка или зависисимост е статистически значима, трябва да се провери хипотезата, чрез т.нар. F – критерий.

$$A : \left| \begin{array}{l} H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_\varepsilon^2 \\ H_A : \sigma_A^2 \neq \sigma_\varepsilon^2 \end{array} \right. \qquad F_A = \frac{S_A^2}{S_\varepsilon^2} = \frac{29{,}56}{1{,}26} = 23{,}46$$

$F_T(4;16;\alpha = 0{,}05) = 3{,}01$

$\Rightarrow F_A > F_T \quad \Rightarrow$ Нулевата хипотеза се отхвърля.

$$B : \left| \begin{array}{l} H_0 : \sigma_B^2 = \sigma_\varepsilon^2 \\ H_A : \sigma_B^2 \neq \sigma_\varepsilon^2 \end{array} \right. \qquad F_B = \frac{S_B^2}{S_\varepsilon^2} = \frac{7{,}39}{1{,}26} = 5{,}865$$

$F_T(4;16;\alpha = 0{,}05) = 3{,}01$

$\Rightarrow F_B > F_T \quad \Rightarrow$ Нулевата хипотеза се отхвърля.

Задача 16. Дадени са следните данните за продажбите на даден продукт от фирма „Х” на брой изделия по години и по тримесечия:

Година	Тримесечие			
	1	2	3	4
2000	362	386	437	427
2001	405	433	470	442
2002	402	420	456	416
2003	440	508	496	455
2004	480	525	498	436

1. Да се изследва тенденцията за развитие на продажбите, като се използва права линия (линеен тренд).
2. Да се изследва тенденцията за развитие на продажбите, като се използва парабола (квадратичен тренд).
3. Да се пресметне стандартната грешка при двата тренда , да се сравнят и да се установи, кой е правдоподобния тренд.
4. Да се пресметнат темповете на растеж на динамичния ред при постоянна база и при верижна база по тримесечия.
5. Да се пресметнат темповете на прираст по години, като за основа се вземе:
   А) 2000 г. Б) 2001 г.

Решение:

1) Линеен тренд

За намиране на числовите стойности на параметрите на линеен модел от вида $\hat{Y} = a + b.t$ може да се работи със следната система уравнения:

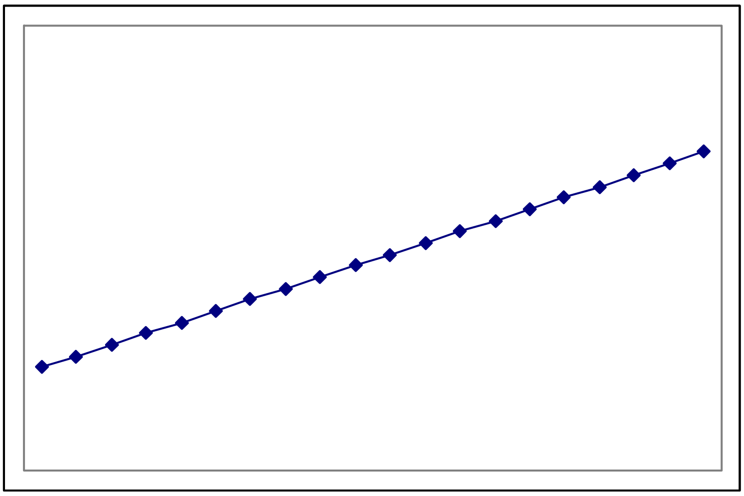
$$\left| \begin{array}{l} \sum Y = Na + b\sum t \\ \sum Yt = a\sum t + b\sum t^2 \end{array} \right.$$

Избираме t така, че $\sum t = 0$. Тогава за числовите стойности на параметрите са съответно равни на:

$$a = \frac{\sum Y}{N} = \frac{8894}{20} = 440{,}7$$

$$b = \frac{\sum Yt}{\sum t^2} = \frac{6670}{2660} = 2{,}55$$

Година	Тримесечие	Продажби (в бройки)				
		Y	t	Y.t	t^2	$\hat{Y}$
2000	1	362	-19	-6878	361	396
	2	386	-17	-6562	289	401
	3	437	-15	-6555	225	407
	4	427	-13	-5551	169	412
2001	1	405	-11	-4455	121	417
	2	433	-9	-3897	81	422
	3	470	-7	-3290	49	427
	4	442	-5	-2210	25	432
2002	1	402	-3	-1206	9	437
	2	420	-1	-420	1	442
	3	456	1	456	1	447
	4	416	3	1248	9	452
2003	1	440	5	2200	25	457
	2	508	7	3556	49	463
	3	496	9	4464	81	468
	4	455	11	5005	121	473
2004	1	480	13	6240	169	478
	2	525	15	7875	225	483
	3	498	17	8466	289	488
	4	436	19	8284	361	493
Общо:	**20**	**8894**	**0**	**6770**	**2660**	**8894**



2) Квадратичен тренд

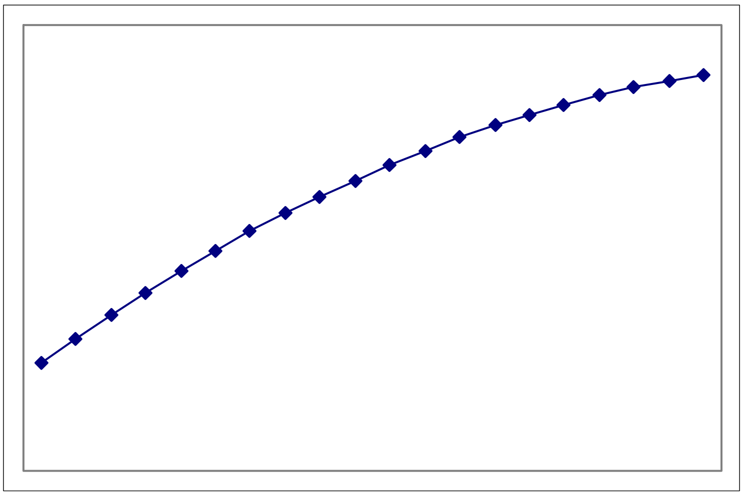
За намиране на числовите стойности на параметрите на квадратичен трендов модел от вида $\hat{Y} = a + b.t + ct^2$ може да се работи със следната система уравнения:

$$\begin{cases} \sum Y = Na + b\sum t + c\sum t^2 \\ \sum Yt = a\sum t + b\sum t^2 + c\sum t^3 \\ \sum Yt^2 = a\sum t^2 + b\sum t^3 + c\sum t^4 \end{cases}$$

Избираме t така, че $\sum t = 0$, при което следователно и $\sum t^3 = 0$.

Година	Тримесечие	Продажби (в бройки)							
		Y	t	Y.t	t^2	$Y.t^2$	t^3	t^4	$\hat{Y}$
2000	1	362	-19	-6878	361	130682	-6859	130321	387
	2	386	-17	-6562	289	111554	-4913	83521	395
	3	437	-15	-6555	225	98325	-3375	50625	403
	4	427	-13	-5551	169	72163	-2197	28561	410
2001	1	405	-11	-4455	121	49005	-1331	14641	417
	2	433	-9	-3897	81	35073	-729	6561	424
	3	470	-7	-3290	49	23030	-343	2401	431
	4	442	-5	-2210	25	11050	-125	625	437
2002	1	402	-3	-1206	9	3618	-27	81	442
	2	420	-1	-420	1	420	-1	1	448
	3	456	1	456	1	456	1	1	453
	4	416	3	1248	9	3744	27	81	458
2003	1	440	5	2200	25	11000	125	625	462
	2	508	7	3556	49	24892	343	2401	466
	3	496	9	4464	81	40176	729	6561	470
	4	455	11	5005	121	55055	1331	14641	473
2004	1	480	13	6240	169	81120	2197	28561	476
	2	525	15	7875	225	118125	3375	50625	479
	3	498	17	8466	289	143922	4913	83521	481
	4	436	19	8284	361	157396	6859	130321	483
Общо:	**20**	**8894**	**0**	**6770**	**2660**	**1170806**	**0**	**634676**	**8894**

a= 450,43
b= 2,55
c= -0,04



3)

Година	Тримесечие	Продажби (в бройки)	Линеен тренд		Квадратичен тренд	
		Y	$\hat{Y}$	$\sum(Y-\hat{Y})^2$	$\hat{Y}$	$\sum(Y-\hat{Y})^2$
2000	1	362	396	1179	387	601
	2	386	401	238	395	76
	3	437	407	929	403	1186
	4	427	412	237	410	287
2001	1	405	417	137	417	149
	2	433	422	126	424	80
	3	470	427	1859	431	1560
	4	442	432	101	437	29
2002	1	402	437	1230	442	1633
	2	420	442	491	448	775
	3	456	447	77	453	9
	4	416	452	1320	458	1737
2003	1	440	457	304	462	487
	2	508	463	2069	466	1753
	3	496	468	806	470	684
	4	455	473	313	473	332
2004	1	480	478	5	476	14
	2	525	483	1774	479	2124
	3	498	488	101	481	281
	4	436	493	3256	483	2232
Общо:	**20**	**8894**	**8894**	**16550**	**8894**	**16029**
S_Y=				**29,51**		**29,05**

Стандартната грешка на оценката се пресмята по формулата:

$$S_Y = \sqrt{\frac{\sum(Y-\hat{Y})^2}{N-1}}$$

Стандартната грешка при използване на праволинеен модел на продажбите е числено равна на 29,51, а при използването на квадратичен модел – 29,05. Следователно за моделиране на тенденцията е по-целесъобразно да се работи с квадратичен трендов модел. Очакваните продажби за първите две тримесечия на 2005 година са съответно 504 и 509.

4) Темпове на растеж на реализираните продажби по тримесечия

Година	Тримесечие	Продажби (в бройки)	Темп на растеж при постоянна база	Темп на растеж при верижна база
		Y_N	$T_{N/1} = \frac{Y_N}{Y_1}$	$T_{N/N-1} = \frac{Y_N}{Y_{N-1}}$
2000	1	362		
	2	386	1,07	1,07
	3	437	1,21	1,13
	4	427	1,18	0,98
2001	1	405	1,12	0,95
	2	433	1,20	1,07
	3	470	1,30	1,09
	4	442	1,22	0,94
2002	1	402	1,11	0,91
	2	420	1,16	1,04
	3	456	1,26	1,09
	4	416	1,15	0,91
2003	1	440	1,22	1,06
	2	508	1,40	1,15
	3	496	1,37	0,98
	4	455	1,26	0,92
2004	1	480	1,33	1,05
	2	525	1,45	1,09
	3	498	1,38	0,95
	4	436	1,20	0,88

5) Темпове на прираст

Година	Продажби (в бройки)	Темп на прираст при постоянна база 2000 г	Темп на прираст при постоянна база 2001 г
		$T_{t/2000} = \frac{Y_t}{Y_{2000}} - 1$	$T_{t/2001} = \frac{Y_t}{Y_{2001}} - 1$
2000	1612		
2001	1750	0,086	
2002	1694		-0,032
2003	1899		0,085
2004	1939		0,108

Задача 17. Мениджърът на една туристическа агенция желае да установи дали сезонността може да се счита като фактор, който статистически значимо влияе върху натоварването на легловата база в един курортен комплекс. За целта през 2005 година са били наблюдавани шест случайно подбрани хотела през четирите сезона. Получените резултати са поместени в следващата таблица:

Сезони	Реализиран брой нощувки
Пролет	115 , 134 , 97 , 123 , 136 , 145
Лято	115 , 95 , 144 , 152 , 128 , 166
Есен	94 , 108 , 132 , 151 , 119 , 126
Зима	133 , 124 , 147 , 96 , 148 , 152

Проверката да се извърши при риск за грешки от първи род равен на 1 %.

Решение:

Таблица 3. Работна таблица

Сезони	**Реализиран брой нощувки (** x_{ij} **)**	$\sum_i x_{ij}$	n_j	$\overline{X}_j$	$\sum_i (x_{ij} - \overline{X}_j)^2$	$\overline{X}_j - \overline{X}_0$	$(\overline{X}_j - \overline{X}_0)^2$
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Пролет	115 , 134 , 97 , 123 , 136 , 145	750	6	125,0	1490,0	-3,3	11,1
Лято	115 , 95 , 144 , 152 , 128 , 166	800	6	133,3	3363,3	5,0	25,0
Есен	94 , 108 , 132 , 151 , 119 , 126	730	6	121,7	1945,3	-6,7	44,4
Зима	133 , 124 , 147 , 96 , 148 , 152	800	6	133,3	2231,3	5,0	25,0
Общо:		3080	24	128,3	9030,0		106

В колона 5 на таблица 3 са поместени данни за средния брой реализирани нощувки, падащ се на един хотел в съответният сезон. За да установим дали сезонността може да се счита като фактор, който статистически значимо влияе върху натоварването на легловата база в един курортен комплекс ще приложим дисперсионният анализ:

1. Пресмятаме общата средна:

$$\overline{X}_0 = \frac{3080}{24} = 128,3$$

2. По формула $\sigma_\mu^2 = \frac{\sum_{j=1}^{k} (\overline{X}_j - \overline{X}_0)^2 . n_j}{k-1}$ пресмятаме междугруповата дисперсия:

$$\sigma_\mu^2 = \frac{(125{,}0-128{,}3)^2.6+(133{,}3-128{,}3)^2.6+(121{,}7-128{,}3)^2.6+(133{,}3-128{,}3)^2.6}{4-1} =$$
$$= \frac{((125{,}0-128{,}3)^2 + (133{,}3-128{,}3)^2 + (121{,}7-128{,}3)^2 + (133{,}3-128{,}3)^2).6}{3} = \frac{106.6}{3} = 212$$

3. По формула $\sigma_\beta^2 = \frac{\sum_j \sum_i (x_{ij} - \overline{X}_j)^2}{n-k}$ пресмятаме вътрешногруповата дисперсия:

$$\sigma_\beta^2 = \frac{1490{,}0+3363{,}3+1945{,}3+2231{,}3}{24-4} = \frac{9030}{20} = 451{,}5$$

4. Изчисляваме отношението :

$$F = \frac{\sigma_\mu^2}{\sigma_\beta^2} = \frac{212}{451{,}5} = 0{,}47$$

5. По таблицата на *F*- разпределението се установява F_T . При 3 и 20 степени на свобода и при *P(t)* = 0,99 по таблицата се установява F_T = 4,94.

6. Съпоставяме емпиричната с табличната стойност на *F*. Тъй като в случая $F < F_T$ може да се твърди, че при конкретните условия сезонността не оказва съществено влияние върху реализирания брой нощувки.

Курсова работа № 1

Задача 1. Каква е вероятността при теглене на 4 карти от колода с 32 карти да се паднат:

А) само валета; Б) нито едно вале; В) точно едно вале.

Задача 2. Дадени са данните 12, 16 , 18, 19, 28, 29, 32, 42, 32 , 23, 25, 26, 10, 43, 45, 18, 45, 30, 31, 25, 41. Да се групират в 7 групи и да се определи средната аритметична стойност - $\bar{x}$, медианата - Ме, модата – Мо и стандартното отклонение - σ .

Задача 3. Случайна величина X има разпределение N (m, 4) . Известни са 36 наблюдения, като $\bar{x} = 40$. Намерете 99% доверителен интервал за m .

Задача 4. Намерете уравнението на линейна регресия за зависимост на y от x за данните.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

Въпрос № 1 Комбинаторика. Основни комбинаторни модели - комбинации и вариации с и без повторение, пермутации.

Курсова работа № 2

Задача 1. Каква е вероятността при теглене на 4 карти от колода с 32 карти да се паднат:

А) само купи; Б) нито една купа; В) точно една купа.

Задача 2. Дадени са данните 16,13,26 , 17, 20 , 28 ,25, 29,29 ,32,41 ,32 ,23,44 ,26,21,43, 44, 18, 46,30,31,25,49, 29,22,36, 37. Да се групират в 6 групи и да се определи средната аритметична стойност - $\bar{x}$, медианата - Ме, модата – Мо и стандартното отклонение - σ .

Задача 3. Случайна величина X има разпределение N (m, 3) . Известни са 36 наблюдения, като $\bar{x} = 30$. Намерете 95% доверителен интервал за m .

Задача 4. Намерете уравнението на линейна регресия за зависимост на y от x за данните.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7

Въпрос № 2 Събития. Класическа и статистическа дефиниция на вероятност. Теорема за събиране на вероятностите. Условна вероятност. Формула за пълната вероятност. Независими събития.

Курсова работа № 3

Задача 1. Каква е вероятността при теглене на 4 карти от колода с 32 карти да се паднат:

А) едно вале; Б) нито едно вале ; В) поне едно вале.

Задача 2. Дадени са данните 13, 16 , 18, 19 , 28 ,29 ,32,41 ,32 ,22, 25,26,21,43, 44, 45, 41,30,31,25,41. Да се групират в 8 групи и да се определи средната аритметична стойност - $\bar{x}$, медианата - Ме, модата – Мо и стандартното отклонение - σ .

Задача 3. Случайна величина X има разпределение N (m, 3) . Известни са 49 наблюдения, като $\bar{x} = 100$. Намерете 95% доверителен интервал за m .

Задача 4. Намерете уравнението на линейна регресия за зависимост на y от x за данните.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

Въпрос № 3 Случайни величини. Основни числови характеристики. Функция на разпределение.

Курсова работа № 4

Задача 1. Каква е вероятността при теглене на 3 карти от колода с 32 карти да се паднат:
А) терца майорна; Б) терца майорна от пики; В) три валета.

Задача 2. Дадени са данните 19, 11, 26 , 17, 19 , 28 ,25, 29,29 ,32,41 ,32 ,23,44 ,26,21,43, 45, 18, 46,30,31,25,47, 29,23,36, 37. Да се групират в 6 групи и да се определи средната аритметична стойност - $\bar{x}$, медианата - Ме, модата – Мо и стандартното отклонение - σ .

Задача 3. Случайна величина X има разпределение N (m, 2) . Известни са 36 наблюдения, като $\bar{x} = 20$. Намерете 90% доверителен интервал за m .

Задача 4. Намерете уравнението на линейна регресия за зависимост на y от x за данните.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3

Въпрос № 4 Основни дискретни разпределения - Биномно и Поасоново.

Курсова работа № 5

Задача 1. Каква е вероятността при теглене на 4 карти от колода с 32 карти да се паднат:
А) само купи; Б) само червени; В) две купа и две кари.

Задача 2. Дадени са данните 10,16 , 17, 19 , 28 ,29 ,32, 37 ,32 ,23,25,26,21,40, 42, 18, 25, 30,31,25,41. Да се групират в 8 групи и да се определи средната аритметична стойност - $\bar{x}$, медианата - Ме, модата – Мо и стандартното отклонение - σ .

Задача 3. Случайна величина X има разпределение N (m, 4) . Известни са 49 наблюдения, като $\bar{x} = 50$. Намерете 99% доверителен интервал за m .

Задача 4. Намерете уравнението на линейна регресия за зависимост на y от x за данните.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	11

Въпрос № 5 Основни непрекъснати разпределения - равномерно, нормално. Работа с таблица на стандартно нормално разпределение.

Курсова работа № 6

Задача 1. Каква е вероятността при теглене на 4 карти от колода с 32 карти да се паднат:

А) от различни бои; Б) нито една купа; В) от две бои.

Задача 2. Дадени са данните 20 , 15, 19 , 28 ,25, 29,29 ,32,41 ,32 ,23,44 ,26,21,43, 45, 48, 46,30,31,25,50, 29,22,36, 37. Да се групират в 5 групи и да се определи средната аритметична стойност - $\bar{x}$, медианата - Ме, модата – Мо и стандартното отклонение - σ .

Задача 3. Случайна величина X има разпределение N (m, 2) . Известни са 64 наблюдения, като $\bar{x} = 45$. Намерете 98% доверителен интервал за m .

Задача 4. Намерете уравнението на линейна регресия за зависимост на y от x за данните.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-8	-6	-4	-2	0	1	4	6	8	0

Въпрос № 6 Статистика и статистически методи. Видове данни - интервални, ординарни, номинални.

Курсова работа № 7

Задача 1. Каква е вероятността при теглене на 4 карти от колода с 32 карти да се паднат:

А) петдесет майорно; Б) каре дами; В)каре.

Задача 2. . Дадени са данните 12,16 , 17, 15 , 21 ,29 ,32,41 ,32 ,23,25,26,11,43, 44, 19, 46,38,31,25,41. Да се групират в 7 групи и да се определи средната аритметична стойност - $\bar{x}$, медианата - Ме, модата – Мо и стандартното отклонение - σ .

Задача 3. Случайна величина X има разпределение N (m, 4) . Известни са 64 наблюдения, като $\bar{x} = 40$. Намерете 95% доверителен интервал за m .

Задача 4. Намерете уравнението на линейна регресия за зависимост на y от x за данните.

X	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
Y	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4

Въпрос № 7 Видове извадки - прости случайни извадки, систематични, неслучайни, представителни.

Курсова работа № 8

Задача 1. Каква е вероятността при теглене на 4 карти от колода с 32 карти да се паднат:
А) две аса и две валета; Б) асо купа и три попа; В) точно едно асо.

Задача 2. Дадени са данните 10,12,26 , 17, 19 , 28 ,25, 29,29 ,32,41 ,32 ,23,44 ,26,21,43, 45, 18, 46,30,31,25,48, 29,22,36, 52. Да се групират в 6 групи и да се определи средната аритметична стойност - $\bar{x}$, медианата - Ме, модата – Мо и стандартното отклонение - σ .

Задача 3. Случайна величина X има разпределение N (m, 1) . Известни са 36 наблюдения, като $\bar{x} = 30$. Намерете 95% доверителен интервал за m .

Задача 4. Намерете уравнението на линейна регресия за зависимост на y от x за данните.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3

Въпрос № 9 Честотни случайни разпределения - дискретни, интервални (групиране на данни), кумулативни (извадкова функция на разпределение).

Курсова работа № 9

Задача 1. Каква е вероятността при теглене на 4 карти от колода с 32 карти да се паднат:
А) само кари; Б) нито една купа; В) поне една пика.

Задача 2. Дадени са данните 12, 10 , 17, 19 , 28 ,29 ,32,41 ,32 ,23,25,26,21,43, 44, 18, 41,50,31,25,41. Да се групират в 8 групи и да се определи средната аритметична стойност - $\bar{x}$, медианата - Ме, модата – Мо и стандартното отклонение - σ .

Задача 3. Случайна величина X има разпределение N (m, 9) . Известни са 36 наблюдения, като $\bar{x} = 60$. Намерете 90% доверителен интервал за m .

Задача 4. Намерете уравнението на линейна регресия за зависимост на y от x за данните.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	5	4	3	2	1	0	1	-2	0	1

Въпрос № 10 Графично представяне - полигон и хистограма.

Курсова работа № 10

Задача 1. Каква е вероятността при хвърляне на 4 зара да се паднат:
А) само двойки; Б) нито една двойка; В) точно една двойка.

Задача 2. Дадени са данните 15 , 17, 19 , 28 ,25, 29,29 ,32,41 ,32 ,23,44 ,26,21,43, 50, 18, 46,30,31,25,47, 29,22,36, 37. Да се групират в 5 групи и да се определи средната аритметична стойност - $\bar{x}$, медианата - Ме, модата – Мо и стандартното отклонение - σ .

Задача 3. Случайна величина X има разпределение N (m, 9) . Известни са 49 наблюдения, като $\bar{x} = 50$. Намерете 99% доверителен интервал за m .

Задача 4. Намерете уравнението на линейна регресия за зависимост на y от x за данните.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	0	1	2	3	4	5	-1	-2	1	0

Въпрос № 11 Извадкови характеристики за средно ($\overline{X}_n$, мода, медиана, квантили, претеглено средно) и разсейване (размах, дисперсия, стандартно отклонение) за негрупиране данни.

Курсова работа № 11

Задача 1. Каква е вероятността при хвърляне на 4 зара да се паднат:
А) само четни; Б) нито едно четно; В) точно едно четно.

Задача 2. Дадени са данните 12,15 , 17, 19 , 28 ,29 , 31,41 ,32 ,23,25,26,11,42, 45, 18, 46,32,31,25,41. Да се групират в 7 групи и да се определи средната аритметична стойност - $\bar{x}$, медианата - Ме, модата – Мо и стандартното отклонение - σ .

Задача 3. Случайна величина X има разпределение N (m, 16) . Известни са 49 наблюдения, като $\bar{x} = 100$. Намерете 95% доверителен интервал за m .

Задача 4. Намерете уравнението на линейна регресия за зависимост на y от x за данните.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	0	1	0	1	2	3	2	3	0	1

Въпрос № 12 Извадкови характеристики за средно и дисперсия при групирани данни.

Курсова работа № 12

Задача 1. Каква е вероятността при хвърляне на 4 зара да се паднат:
А) две двойки и две четворки; Б) числата 1 ,2, 3, 4; В) числата 1, 5, 5, 6.

Задача 2. Дадени са данните 20,12,26 , 17, 19 , 28 ,25, 25,29 ,32,41 ,32 ,23,44 ,26,21,43, 45, 18, 46,30,31,25,48, 29,22,36, 37. Да се групират в 6 групи и да се определи средната аритметична стойност - $\bar{x}$, медианата - Ме, модата – Мо и стандартното отклонение - σ .

Задача 3. Случайна величина X има разпределение N (m, 1) . Известни са 64 наблюдения, като $\bar{x} = 45$. Намерете 98% доверителен интервал за m .

Задача 4. Намерете уравнението на линейна регресияза зависимост на y от x за данните.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	2	3	4	1	2	3	3	2	1	0

Въпрос № 13 Точкови оценки. Свойства.

Курсова работа № 13

Задача 1. Каква е вероятността при хвърляне на 4 зара да се паднат:
А) поне една двойка; Б) нито една двойка; В) точно една двойка.

Задача 2. Дадени са данните 12,15 , 17, 19 , 28 ,29 ,32,41 ,32 ,23,24,26,21,43, 44, 18, 41,30,31,25,41. Да се групират в 8 групи и да се определи средната аритметична стойност - $\bar{x}$, медианата - Me, модата – Mo и стандартното отклонение - σ .

Задача 3. Случайна величина X има разпределение N (m, 16) . Известни са 81наблюдения, като $\bar{x} = 20$. Намерете 99% доверителен интервал за m .

Задача 4. Намерете уравнението на линейна регресия за зависимост на y от x за данните.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	0	1	-1	4	5	4	5	6	1	0

Въпрос № 14 Доверителни интервали относно средно и дисперсия.

Курсова работа № 14

Задача 1. Произведени са 10 изделия от тип А, 5 изделия от тип Б и 15 изделия от тип В, като са проверени за качество 2 изделия от тип А, 3 изделия от тип Б и 1 изделие от тип В. На изложба е представено по едно изделие от всеки тип. Каква е вероятността да се представят само проверени изделия?

Задача 2. Дадени са данните 17,12,26 , 23,17, 19 , 28 ,25, 29,23,29 ,32,41 ,32 ,23,44 ,26,21,43, 45, 18, 46,30,31,25,48, 29,22,36, 37. Да се определи средната аритметична стойност - $\bar{x}$, медианата - Me, модата – Mo и стандартното отклонение - σ .

Задача 3. Случайна величина X има разпределение N (m, 4) . Известни са 100 наблюдения, като $\bar{x} = 30$. Намерете 95% доверителен интервал за m .

Задача 4. Намерете уравнението на линейна регресия за зависимост на y от x за данните.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	1	0	-1	-2	6	5	4	3	1	0

Въпрос № 15 Проверка на хипотези относно: средно, разликата между средните на две извадки.

Курсова работа № 15

Задача 1. Произведени са 10 изделия от тип А, 5 изделия от тип Б и 15 изделия от тип В, като са проверени за качество 2 изделия от тип А, 3 изделия от тип Б и 1 изделие от тип В. На изложба е представено по едно изделие от всеки тип. Каква е вероятността да се представят само непроверени изделия?

Задача 2. Дадени са данните 13,16 , 18, 21, 19 , 28 ,29 ,32,41 ,32 ,23,25,26,21,43, 44, 18, 41,30,31,25,41,21 . Да се определи средната аритметична стойност - $\bar{x}$, медианата - Me, модата – Mo и стандартното отклонение - σ .

Задача 3. Случайна величина X има разпределение N (m, 9) . Известни са 121 наблюдения, като $\bar{x} = 90$. Намерете 90% доверителен интервал за m .

Задача 4. Намерете уравнението на линейна регресия за зависимост на y от x за данните.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	2	1	0	-1	5	4	3	2	1	0

Въпрос № 16 Ковариация и корелационен коефициент. Корелационен анализ.

Курсова работа № 16

Задача 1. Произведени са 10 изделия от завод А, 5 изделия от завод Б и 15 изделия от завод В, като дефектни са 2 изделия от завод А, 1 изделие от завод Б и 4 изделия от завод В. На изложба е представено едно изделие. Каква е вероятността да се представи само дефектно изделие?

Задача 2. Дадени са данните 19 , 17, 19 , 28 ,25, 29,29 ,32,41 ,32 „30 ,31,23,44 ,26,21,43, 30,45, 18, 46,30,31,25,47, 29,22,36, 37. Да се определи средната аритметична стойност - $\bar{x}$, медианата - Ме, модата – Мо и стандартното отклонение - σ .

Задача 3. Случайна величина X има разпределение N (m, 4) . Известни са 49 наблюдения, като $\bar{x} = 50$. Намерете 99% доверителен интервал за m .

Задача 4. Намерете коефициента на корелация **r** .

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

Въпрос № 17 Метод на най-малките квадрати. Регресионен анализ. Прогнозиране.

Курсова работа № 17

Задача 1. Произведени са 15 изделия от тип А, 5 изделия от тип Б и 10 изделия от тип В, като са проверени за качество 12 изделия от тип А, 4 изделия от тип Б и 8 изделия от тип В. На изложба е представено по едно изделие от всеки тип. Каква е вероятността да се представят само проверени изделия?

Задача 2. Дадени са данните 14, 16 , 17, 19 , 28 ,29 ,32,41 ,32 ,23,25,26,11,43, 45, 18, 46,30,31,25,41, 25. Да се определи средната аритметична стойност - $\bar{x}$, медианата - Ме, модата – Мо и стандартното отклонение - σ .

Задача 3. Случайна величина X има разпределение N (m, 9) . Известни са 81 наблюдения, като $\bar{x} = 100$. Намерете 95% доверителен интервал за m .

Задача 4. Намерете коефициента на корелация **r** .

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7

Въпрос № 1 Комбинаторика. Основни комбинаторни модели - комбинации и вариации с и без повторение, пермутации.

Курсова работа № 18

Задача 1. Произведени са 10 изделия от завод А, 5 изделия от завод Б и 15 изделия от завод В, като дефектни са 2 изделия от завод А, 1 изделие от завод Б и 4 изделия от завод В. На изложба е представено едно изделие, което се оказало дефектно. Каква е вероятността то да еи произведено в завод А ?

Задача 2. Дадени са данните 21, 12,26 , 23,17, 19 , 28 ,25, 29,23,29 ,32,41 ,32 ,23,44 ,26,21,43, 45, 18, 46,30,31,25,48, 29,22,36, 37. Да се определи средната аритметична стойност - $\bar{x}$, медианата - Ме, модата – Мо и стандартното отклонение - σ .

Задача 3. Случайна величина X има разпределение N (m, 1) . Известни са 64 наблюдения, като $\bar{x} = 45$. Намерете 98% доверителен интервал за m .

Задача 4. Намерете коефициента на корелация **r** .

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

Въпрос № 2 Събития. Класическа и статистическа дефиниция на вероятност. Теорема за събиране на вероятностите. Условна вероятност. Формула за пълната вероятност. Независими събития.

Курсова работа № 19

Задача 1. Произведени са 20 изделия от завод А, 10 изделия от завод Б и 30 изделия от завод В, като дефектни са 2 изделия от завод А, 1 изделие от завод Б и 4 изделия от завод В. На изложба е представено едно изделие, което се оказало дефектно. Каква е вероятността то да еи произведено в завод Б ?

Задача 2. . Дадени са данните 14, 16 , 17, 21, 19 , 28 ,29 ,32,41 ,32 ,23,25,26,21,43, 44, 18, 41,30,31,25,41,21 . Да се определи средната аритметична стойност - $\bar{x}$, медианата - Ме, модата – Мо и стандартното отклонение - σ .

Задача 3. Случайна величина X има разпределение N (m, 2) . Известни са 49 наблюдения, като $\bar{x} = 95$. Намерете 95% доверителен интервал за m .

Задача 4. Намерете коефициента на корелация **r** .

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3

Въпрос № 3 Случайни величини. Основни числови характеристики. Функция на разпределение.

Курсова работа № 20

Задача 1. Произведени са 10 изделия от завод А, 15 изделия от завод Б и 25 изделия от завод В, като дефектни са 2 изделия от завод А, 2 изделия от завод Б и 3 изделия от завод В. На изложба е представено едно изделие, което се оказало дефектно. Каква е вероятността то да еи произведено в завод В ?

Задача 2. Дадени са данните 22, 17, 19 , 28 ,25, 29,29 ,32,41 ,32 ,,30 ,31,23,44 ,26,21,43, 30,45, 18, 46,30,31,25,47, 29,22,36, 37. Да се определи средната аритметична стойност - $\bar{x}$, медианата - Ме, модата – Мо и стандартното отклонение - σ .

Задача 3. Случайна величина X има разпределение N (m, 5) . Известни са 64 наблюдения, като $\bar{x} = 45$. Намерете 90% доверителен интервал за m .

Задача 4. Намерете коефициента на корелация **r** .

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-7	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	11

Въпрос № 4 Основни дискретни разпределения - Биномно и Поасоново.

Курсова работа № 21

Задача 1. Произведени са 10 изделия от завод А, 10 изделия от завод Б и 20изделия от завод В, като дефектни са 2 изделия от завод А, 3 изделия от завод Б и 5 изделия от завод В. На изложба е представено едно изделие, което се оказало дефектно. Каква е вероятността то да еи произведено в завод А , да е произведено в завод Б или да е произведено в завод В?
Задача 2. Дадени са данните 11, 13,14,17,16 , 17, 19 , 28 ,29 ,32,41 ,32 ,23,25,26,11,43, 45, 18, 46,30,31,25,41, 25. Да се определи средната аритметична стойност - $\bar{x}$, медианата - Ме, модата – Мо и стандартното отклонение - σ .

Задача 3. Случайна величина X има разпределение N (m, 8) . Известни са 25 наблюдения, като $\bar{x} = 60$. Намерете 90% доверителен интервал за m .

Задача 4. Намерете коефициента на корелация **r** .

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-8	-6	-4	-2	0	1	4	6	8	0

Въпрос № 5 Основни непрекъснати разпределения - равномерно, нормално. Работа с таблица на стандартно нормално разпределение.

Курсова работа № 22

Задача 1. Дадени са 10 съда, разделени в три групи. Първата група от тях се състои от три съда и всеки от тях поотделно съдържа по 11 бели и 7 черни топки. Втората група е от 5 съда и всеки от тях поотделно съдържа по 9 бели и 6 черни топки. Третата група съдове е от 2 съда и всеки от тях поотделно съдържа по 17 бели и 8 черни топки. От един случайно избран съд изваждаме топка. При условие, че сме извадили бяла топка, каква е вероятността тя да е извадена от първата група съдове?
Задача 2. Дадени са данните 10, 12,26 , 23,17, 19 , 28 ,25, 29,23,29 ,32,41 ,32 ,23,44 ,26,21,43, 45, 18, 46,30,31,25,48, 29,22,36, 37. Да се определи средната аритметична стойност - $\bar{x}$, медианата - Ме, модата – Мо и стандартното отклонение - σ .

Задача 3. Случайна величина X има разпределение N (m, 4) . Известни са 81 наблюдения, като $\bar{x} = 40$. Намерете 95% доверителен интервал за m .

Задача 4. Намерете коефициента на корелация **r** .

X	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
Y	5	4	3	3	1	0	-1	-2	-3	-4

Въпрос № 6 Статистика и статистически методи. Видове данни - интервални, ординарни, номинални.

Курсова работа № 23

Задача 1. Колко четирицифрени числа могат да се напишат с цифрите
А) 0, 1, 2, 3; Б) 0, 0, 2, 4; В) 1, 2, 4, 8.

Задача 2. Дадени са данните 19 , 17, 18 , 28 ,25, 29,29 ,32,41 ,32 ,23,44 ,26,21,43, 45, 18, 46,30,31,25,47, 29,25,36, 37. Да се групират в 5 групи и да се определи средната аритметична стойност - $\bar{x}$, медианата - Ме, модата – Мо и стандартното отклонение - σ .

Задача 3. Случайна величина X има разпределение N (m, 25) . Известни са 36 наблюдения, като $\bar{x} = 100$. Намерете 90% доверителен интервал за m .

Задача 4. Намерете коефициента на корелация **r** .

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	1	0	-1	-2	6	5	4	3	1	0

Въпрос № 14 Доверителни интервали относно средно и дисперсия.

Курсова работа № 24

Задача 1. Дадени са 15 съда, разделени в три групи. Първата група от тях се състои от 5 съда и всеки от тях поотделно съдържа по 13 бели и 7 черни топки. Втората група е от 7 съда и всеки от тях поотделно съдържа по 8 бели и 5 черни топки. Третата група съдове е от 3 съда и всеки от тях поотделно съдържа по 11 бели и 7 черни топки. От един случайно избран съд изваждаме топка. При условие, че сме извадили бяла топка, каква е вероятността тя да е извадена от първата група съдове?

Задача 2. Дадени са данните 11,21, 34,12,16 , 17, 21, 19 , 28 ,29 ,32,41 ,32 ,23,25,26,21,43, 44, 18, 41,30,31,25,41,21 51,52. Да се определи средната аритметична стойност - $\bar{x}$, медианата - Ме, модата – Мо и стандартното отклонение - σ .

Задача 3. Случайна величина X има разпределение N (m, 1) . Известни са 81 наблюдения, като $\bar{x} = 20$. Намерете 95% доверителен интервал за m .

Задача 4. Намерете коефициента на корелация **r** .

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	6	6	4	2	2	1	0	-1	-2	-3

Въпрос № 7 Видове извадки - прости случайни извадки, систематични, неслучайни, представителни.

Курсова работа № 25

Задача 1. Дадени са 10 съда, разделени в три групи. Първата група от тях се състои от три съда и всеки от тях поотделно съдържа по 11 бели и 7 черни топки. Втората група е от 5 съда и всеки от тях поотделно съдържа по 9 бели и 6 черни топки. Третата група съдове е от 2 съда и всеки от тях поотделно съдържа по 17 бели и 8 черни топки. От един случайно избран съд изваждаме топка. При условие, че сме извадили бяла топка, каква е вероятността тя да е извадена от втората група съдове?

Задача 2. Дадени са данните 22 , 17, 19 ,18,19, 28 ,25, 29,29 ,32,41 ,32 ,,30 ,31,23,44 ,26,21,43, 30,45, 18, 46,30,31,25,47, 29,22,36, 37. Да се определи средната аритметична стойност - $\bar{x}$, медианата - Ме, модата – Мо и стандартното отклонение - σ .

Задача 3. Случайна величина X има разпределение N (m, 3) . Известни са 49 наблюдения, като $\bar{x} = 50$. Намерете 95% доверителен интервал за m .

Задача 4. Намерете коефициента на корелация **r** .

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	5	5	3	2	1	1	1	-2	0	2

Въпрос № 9 Честотни случайни разпределения - дискретни, интервални (групиране на данни), кумулативни (извадкова функция на разпределение).

Курсова работа № 26

Задача 1. Дадени са 15 съда, разделени в три групи. Първата група от тях се състои от 5 съда и всеки от тях поотделно съдържа по 13 бели и 7 черни топки. Втората група е от 7 съда и всеки от тях поотделно съдържа по 8 бели и 5 черни топки. Третата група съдове е от 3 съда и всеки от тях поотделно съдържа по 11 бели и 7 черни топки. От един случайно избран съд изваждаме топка. При условие, че сме извадили бяла топка, каква е вероятността тя да е извадена от третата група съдове?

Задача 2. Дадени са данните 13,16 , 17, 19 , 28 ,29 ,32,41 ,32 ,23,25,26,11,43, 45, 18, 46,30,31,25,41, 25,1,2,5,8,9,5. Да се определи средната аритметична стойност - $\bar{x}$, медианата - Ме, модата – Мо и стандартното отклонение - σ .

Задача 3. Случайна величина X има разпределение N (m, 2) . Известни са 100 наблюдения, като $\bar{x} = 60$. Намерете 99% доверителен интервал за m .

Задача 4. Намерете коефициента на корелация **r** .

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	0	1	2	3	4	5	-1	-2	1	0

Въпрос № 10 Графично представяне - полигон и хистограма.

Курсова работа № 27

Задача 1. От урна с 5 бели, 3 зелени и 7 червени топки вадим по случаен начин 6 топки. Каква е вероятността да бъдат извадени 2 бели, 1 зелена и 3 червени топки?

Задача 2. Дадени са данните 30, 28 ,29 ,32,41 ,32 ,33,25,30,21,43, 44, 18, 41,30,31,25,35,21 . Да се определи средната аритметична стойност - $\bar{x}$, медианата - Ме, модата – Мо и стандартното отклонение - σ .

Задача 3. Случайна величина X има разпределение N (m, 10) . Известни са 100 наблюдения, като x=80. Намерете 95% доверителен интервал за m .

Задача 4. Намерете уравнението на линейна регресия за зависимост на x от y за данните.

X	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
Y	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4

Въпрос № 16 Ковариация и корелационен коефициент. Корелационен анализ.

Курсова работа № 28

Задача 1. Дадени са 15 съда, разделени в три групи. Първата група от тях се състои от 5 съда и всеки от тях поотделно съдържа по 13 бели и 7 черни топки. Втората група е от 7 съда и всеки от тях поотделно съдържа по 8 бели и 5 черни топки. Третата група съдове е от 3 съда и всеки от тях поотделно съдържа по 11 бели и 7 черни топки. От един случайно избран съд изваждаме топка. При условие, че сме извадили черна топка, каква е вероятността тя да е извадена от първата група съдове?

Задача 2. Дадени са данните 17,12, 26, 23,17, 19 , 28 ,25, 29, 23, 29 ,32 ,23, 44 ,26, 21,43, 45, 18, 46, 30, 31, 25, 48, 29, 22, 36, 37. Да се определи средната аритметична стойност - $\bar{x}$, медианата - Ме, модата – Мо и стандартното отклонение - σ .

Задача 3. Случайна величина X има разпределение N (m, 9) . Известни са 121 наблюдения, като $\bar{x} = 70$. Намерете 99% доверителен интервал за m .

Задача 4. Намерете коефициента на корелация **r** .

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	0	1	0	1	2	3	2	3	0	1

Въпрос № 11 Извадкови характеристики за средно ($\overline{X}_n$, мода, медиана, квантили, претеглено средно) и разсейване (размах, дисперсия, стандартно отклонение) за негрупиране данни.

Курсова работа № 29

Задача 1. Дадени са 10 съда, разделени в три групи. Първата група от тях се състои от три съда и всеки от тях поотделно съдържа по 11 бели и 7 черни топки. Втората група е от 5 съда и всеки от тях поотделно съдържа по 9 бели и 6 черни топки. Третата група съдове е от 2 съда и всеки от тях поотделно съдържа по 17 бели и 8 черни топки. От един случайно избран съд изваждаме топка. При условие, че сме извадили черна топка, каква е вероятността тя да е извадена от втората група съдове?

Задача 2. Дадени са данните 43, 28 ,29 ,32,41 ,32 ,23,25,26,21,43, 44, 18, 41,30,31,25,41,21 . Да се определи средната аритметична стойност - $\bar{x}$, медианата - Ме, модата – Мо и стандартното отклонение - σ .

Задача 3. Случайна величина X има разпределение N (m, 9) . Известни са 144 наблюдения, като $\bar{x} = 80$. Намерете 99% доверителен интервал за m .

Задача 4. Намерете коефициента на корелация **r** .

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	2	3	4	1	2	3	3	2	1	0

Въпрос № 12 Извадкови характеристики за средно и дисперсия при групирани данни.

Курсова работа № 30

Задача 1. . Колко четирицифрени числа могат да се напишат с цифрите
А) 1, 1, 2, 3; Б) 0, 0, 4, 4; В) 2, 2, 4, 4.

Задача 2. Дадени са данните 11,15 , 17, 19 , 28 ,29 ,32,41 ,32 ,23,25,26,11,43, 45, 18, 46,30,31,25,41, 27. Да се определи средната аритметична стойност - $\bar{x}$, медианата - Ме, модата – Мо и стандартното отклонение - σ .

Задача 3. Случайна величина X има разпределение N (m, 25) . Известни са 81 наблюдения, като $\bar{x} = 50$. Намерете 90% доверителен интервал за m .

Задача 4. Намерете коефициента на корелация **r** .

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	2	1	0	-1	5	4	3	2	1	0

Въпрос № 15 Проверка на хипотези относно: средно, разликата между средните на две извадки.

Курсова работа № 31

Задача 1. Дадени са 15 съда, разделени в три групи. Първата група от тях се състои от 5 съда и всеки от тях поотделно съдържа по 13 бели и 7 черни топки. Втората група е от 7 съда и всеки от тях поотделно съдържа по 8 бели и 5 черни топки. Третата група съдове е от 3 съда и всеки от тях поотделно съдържа по 11 бели и 7 черни топки. От един случайно избран съд изваждаме топка. При условие, че сме извадили черна топка, каква е вероятността тя да е извадена от третата група съдове?

Задача 2. Дадени са данните 29 , 17, 19 , 28 ,25, 29,29 ,15 ,26,21,43, 30,25, 18, 29,22,36, 37. Да се определи средната аритметична стойност - $\bar{x}$, медианата - Ме, модата – Мо и стандартното отклонение - σ .

Задача 3. Случайна величина X има разпределение N (m, 3) . Известни са 36 наблюдения, като $\bar{x} = 90$. Намерете 99% доверителен интервал за m .

Задача 4. Намерете коефициента на корелация **r** .

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	0	1	-1	4	5	4	5	6	1	0

Въпрос № 13 Точкови оценки. Свойства.

Курсова работа № 32

Задача 1. . Колко четирицифрени числа могат да се напишат с цифрите
А) 1, 1, 2, 2; Б) 0, 0, 2, 2; В) 2, 4, 4, 4.

Задача 2. Дадени са данните 16, 12, 16 , 23,17, 19 , 18 ,25, 29,24, 29 ,32 ,23,44 ,26,21,43, 45, 18, 46,30,31,25,48, 29,22,36, 37. Да се определи средната аритметична стойност - $\bar{x}$, медианата - Ме, модата – Мо и стандартното отклонение - σ .

Задача 3. Случайна величина X има разпределение N (m, 10) . Известни са 81 наблюдения, като $\bar{x} = 50$. Намерете 90% доверителен интервал за m .

Задача 4. Намерете уравнението на линейна регресияза зависимост на x от y за данните.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	2	3	4	1	2	3	3	2	1	0

Въпрос № 16 Ковариация и корелационен коефициент. Корелационен анализ.

Курсова работа № 33

Задача 1. От пълна колода (52 карти) вадим 6 по случаен начин. Каква е вероятността да извадим 2 попа, 1 вале и още 3, които не са нито поп, нито вале?

Задача 2. . Дадени са данните 33, 28 ,29 ,32,41 ,32 ,23,25,33,21,43, 44, 18, 41,30,31,25,33,21 . Да се определи средната аритметична стойност - $\bar{x}$, медианата - Ме, модата – Мо и стандартното отклонение - σ .

Задача 3. Случайна величина X има разпределение N (m, 10) . Известни са 144 наблюдения, като $\bar{x} = 60$. Намерете 95% доверителен интервал за m .

Задача 4. Намерете уравнението на линейна регресия за зависимост на x от y за данните.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	0	1	-1	4	5	4	5	6	1	0

Въпрос № 17 Метод на най-малките квадрати. Регресионен анализ. Прогнозиране.

Курсова работа № 34

Задача 1. От урна с 7 бели, 5 зелени и 8 червени топки вадим по случаен начин 7 топки. Каква е вероятността да бъдат извадени 4 бели, 1 зелена и 2 червени топки?

Задача 2. Дадени са данните 28 , 17, 19 , 28 ,25, 29,29 ,17 ,26,21,43, 28, 25, 18, 29,22,36, 37. Да се определи средната аритметична стойност - $\bar{x}$, медианата - Ме, модата – Мо и стандартното отклонение - σ .

Задача 3. Случайна величина X има разпределение N (m, 10) . Известни са 100 наблюдения, като $\bar{x} = 70$. Намерете 99% доверителен интервал за m .

Задача 4. Намерете уравнението на линейна регресия за зависимост на x от y за данните.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	1	0	-1	-2	6	5	4	3	1	0

Въпрос № 14 Доверителни интервали относно средно и дисперсия.

Курсова работа № 35

Задача 1. От пълна колода (52 карти) вадим 6 по случаен начин. Каква е вероятността да извадим 3 попа, 1 вале и още 2, които не са нито поп, нито вале?

Задача 2. Дадени са данните 10, 12, 16 , 22,19, 19 , 18 ,26, 29,24, 29 ,32 ,23,44 ,26,26,42, 35, 18, 46,30,31,25,48, 29,22,36, 37. Да се определи средната аритметична стойност - $\bar{x}$, медианата - Ме, модата – Мо и стандартното отклонение - σ .

Задача 3. Случайна величина X има разпределение N (m, 6) . Известни са 169 наблюдения, като $\bar{x} = 80$. Намерете 99% доверителен интервал за m .

Задача 4. Намерете уравнението на линейна регресия за зависимост на x от y за данните.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	2	1	0	-1	5	5	4	2	1	0

Въпрос № 15 Проверка на хипотези относно: средно, разликата между средните на две извадки.

Курсова работа № 36

Задача 1. От урна с 10 бели, 3 зелени и 7 червени топки вадим по случаен начин 8 топки. Каква е вероятността да бъдат извадени 4 бели, 1 зелена и 3 червени топки?

Задача 2. Дадени са данните 29, 28 ,29 ,32,41 ,32 ,33,25,30,21,43, 9, 18, 41,30,31,25,29,21 . Да се определи средната аритметична стойност - $\bar{x}$, медианата - Me, модата – Mo и стандартното отклонение - σ .

Задача 3. Случайна величина X има разпределение N (m, 1) . Известни са 121 наблюдения, като $\bar{x} = 90$. Намерете 99% доверителен интервал за m .

Задача 4. Намерете уравнението на линейна регресия за зависимост на x от y за данните.

X	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
Y	6	5	4	3	2	0	1	-1	-4	-4

Въпрос № 2 Събития. Класическа и статистическа дефиниция на вероятност. Теорема за събиране на вероятностите. Условна вероятност. Формула за пълната вероятност. Независими събития

П Р И Л О Ж Е Н И Е

ТАБЛИЦИ НА НЯКОИ РАЗПРЕДЕЛЕНИЯ

Таблица 1. Площи под стандартно нормално разпределение

Таблица 2. Разпределение на Стюдънт - t разпределение

Таблица 3. Хи-квадрат разпределение

Таблица 4. F - разпределение при степени на свобода n1 и n2 и $\alpha = 0{,}01$

Таблица 5. F - разпределение при степени на свобода n1 и n2 и $\alpha = 0{,}05$

Таблица 6. F - разпределение при степени на свобода n1 и n2 и $\alpha = 0{,}1$

Таблица 7. Биномно разпределение

Таблица 1. Площи под стандартно нормално разпределение

Z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,1	0,4990	0,4991	0,4991	0,4991	0,4992	0,4992	0,4992	0,4992	0,4993	0,4993
3,2	0,4993	0,4993	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4994	0,4995	0,4995	0,4995
3,3	0,4995	0,4995	0,4995	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4996	0,4997
3,4	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4997	0,4998

Таблица 2. Разпределение на Стюдънт - t разпределение

Степени на свобода	Равнище на значимост за едностранен тест					
	0,10	**0,05**	**0,025**	**0,01**	**0,005**	**0,0005**
	Равнище на значимост за двустранен тест					
	0,20	**0,10**	**0,05**	**0,02**	**0,01**	**0,001**
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,599
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,924
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	6,869
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,408
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,587
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	4,318
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,850
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,768
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
200	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,340

Таблица 3. Хи-квадрат разпределение

Степени на свобода	**0,10**	**0,05**	**0,02**	**0,01**
1	2,706	3,841	5,412	6,635
2	4,605	5,991	7,824	9,210
3	6,251	7,815	9,837	11,345
4	7,779	9,488	11,668	13,277
5	9,236	11,070	13,388	15,086
6	10,645	12,592	15,033	16,812
7	12,017	14,067	16,622	18,475
8	13,362	15,507	18,168	20,090
9	14,684	16,919	19,679	21,666
10	15,987	18,307	21,161	23,209
11	17,275	19,675	22,618	24,725
12	18,549	21,026	24,054	26,217
13	19,812	22,362	25,472	27,688
14	21,064	23,685	26,873	29,141
15	22,307	24,996	28,259	30,578
16	23,542	26,296	29,633	32,000
17	24,769	27,587	30,995	33,409
18	25,989	28,869	32,346	34,805
19	27,204	30,144	33,687	36,191
20	28,412	31,410	35,020	37,566
21	29,615	32,671	36,343	38,932
22	30,813	33,924	37,659	40,289
23	32,007	35,172	38,968	41,638
24	33,196	36,415	40,270	42,980
25	34,382	37,652	41,566	44,314
26	35,563	38,885	42,856	45,642
27	36,741	40,113	44,140	46,963
28	37,916	41,337	45,419	48,278
29	39,087	42,557	46,693	49,588
30	40,256	43,773	47,962	50,892

Таблица 4. F - разпределение при степени на свобода n1 и n2 и $\alpha = 0{,}01$

	1	2	3	4	5	6	7	8	12	24	∞
1	4052,18	4999,50	5403,35	5624,58	5763,65	5858,99	5928,36	5981,07	6106,32	6234,63	6365,86
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,42	99,46	99,50
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,05	26,60	26,13
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,37	13,93	13,46
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	9,89	9,47	9,02
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,72	7,31	6,88
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,47	6,07	5,65
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,67	5,28	4,86
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,11	4,73	4,31
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,71	4,33	3,91
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,40	4,02	3,60
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,16	3,78	3,36
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	3,96	3,59	3,17
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	3,80	3,43	3,00
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,67	3,29	2,87
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,55	3,18	2,75
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,46	3,08	2,65
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,37	3,00	2,57
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,30	2,92	2,49
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,23	2,86	2,42
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,17	2,80	2,36
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,12	2,75	2,31
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,07	2,70	2,26
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,03	2,66	2,21
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	2,99	2,62	2,17
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	2,96	2,58	2,13
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	2,93	2,55	2,10
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	2,90	2,52	2,06
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	2,87	2,49	2,03
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	2,84	2,47	2,01
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,66	2,29	1,80
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,50	2,12	1,60
120	6,85	4,79	3,95	3,48	3,17	2,96	2,79	2,66	2,34	1,95	1,38
∞	6,63	4,61	3,78	3,32	3,02	2,80	2,64	2,51	2,18	1,79	1,00

Таблица 5. F - разпределение при степени на свобода n1 и n2 и $\alpha = 0{,}05$

	1	2	3	4	5	6	7	8	12	24	∞
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	243,91	249,05	254,31
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,41	19,45	19,50
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,74	8,64	8,53
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	5,91	5,77	5,63
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,68	4,53	4,36
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,00	3,84	3,67
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,57	3,41	3,23
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,28	3,12	2,93
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,07	2,90	2,71
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	2,91	2,74	2,54
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,79	2,61	2,40
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,69	2,51	2,30
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,60	2,42	2,21
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,53	2,35	2,13
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,48	2,29	2,07
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,42	2,24	2,01
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,38	2,19	1,96
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,34	2,15	1,92
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,31	2,11	1,88
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,28	2,08	1,84
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,25	2,05	1,81
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,23	2,03	1,78
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,20	2,01	1,76
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,18	1,98	1,73
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,16	1,96	1,71
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,15	1,95	1,69
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,13	1,93	1,67
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,12	1,91	1,65
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,10	1,90	1,64
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,09	1,89	1,62
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,00	1,79	1,51
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	1,92	1,70	1,39
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,83	1,61	1,25
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,75	1,52	1,00

Таблица 6. F - разпределение при степени на свобода n1 и n2 и $\alpha = 0{,}1$

	1	2	3	4	5	6	7	8	12	24	∞
1	39,86	49,50	53,59	55,83	57,24	58,20	58,91	59,44	60,71	62,00	63,33
2	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,41	9,45	9,49
3	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,22	5,18	5,13
4	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,90	3,83	3,76
5	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,27	3,19	3,10
6	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,90	2,82	2,72
7	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75	2,67	2,58	2,47
8	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,50	2,40	2,29
9	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,38	2,28	2,16
10	3,29	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,28	2,18	2,06
11	3,23	2,86	2,66	2,54	2,45	2,39	2,34	2,30	2,21	2,10	1,97
12	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24	2,15	2,04	1,90
13	3,14	2,76	2,56	2,43	2,35	2,28	2,23	2,20	2,10	1,98	1,85
14	3,10	2,73	2,52	2,39	2,31	2,24	2,19	2,15	2,05	1,94	1,80
15	3,07	2,70	2,49	2,36	2,27	2,21	2,16	2,12	2,02	1,90	1,76
16	3,05	2,67	2,46	2,33	2,24	2,18	2,13	2,09	1,99	1,87	1,72
17	3,03	2,64	2,44	2,31	2,22	2,15	2,10	2,06	1,96	1,84	1,69
18	3,01	2,62	2,42	2,29	2,20	2,13	2,08	2,04	1,93	1,81	1,66
19	2,99	2,61	2,40	2,27	2,18	2,11	2,06	2,02	1,91	1,79	1,63
20	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,04	2,00	1,89	1,77	1,61
21	2,96	2,57	2,36	2,23	2,14	2,08	2,02	1,98	1,87	1,75	1,59
22	2,95	2,56	2,35	2,22	2,13	2,06	2,01	1,97	1,86	1,73	1,57
23	2,94	2,55	2,34	2,21	2,11	2,05	1,99	1,95	1,84	1,72	1,55
24	2,93	2,54	2,33	2,19	2,10	2,04	1,98	1,94	1,83	1,70	1,53
25	2,92	2,53	2,32	2,18	2,09	2,02	1,97	1,93	1,82	1,69	1,52
26	2,91	2,52	2,31	2,17	2,08	2,01	1,96	1,92	1,81	1,68	1,50
27	2,90	2,51	2,30	2,17	2,07	2,00	1,95	1,91	1,80	1,67	1,49
28	2,89	2,50	2,29	2,16	2,06	2,00	1,94	1,90	1,79	1,66	1,48
29	2,89	2,50	2,28	2,15	2,06	1,99	1,93	1,89	1,78	1,65	1,47
30	2,88	2,49	2,28	2,14	2,05	1,98	1,93	1,88	1,77	1,64	1,46
40	2,84	2,44	2,23	2,09	2,00	1,93	1,87	1,83	1,71	1,57	1,38
60	2,79	2,39	2,18	2,04	1,95	1,87	1,82	1,77	1,66	1,51	1,29
120	2,75	2,35	2,13	1,99	1,90	1,82	1,77	1,72	1,60	1,45	1,19
∞	2,71	2,30	2,08	1,94	1,85	1,77	1,72	1,67	1,55	1,38	1,00

Таблица 7. Биномно разпределение

n	k	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0	0,9500	0,9000	0,8500	0,8000	0,7500	0,7000	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1	0,0500	0,1000	0,1500	0,2000	0,2500	0,3000	0,3500	0,4000	0,4500	0,5000
2	0	0,9025	0,8100	0,7225	0,6400	0,5625	0,4900	0,4225	0,3600	0,3025	0,2500
	1	0,0950	0,1800	0,2550	0,3200	0,3750	0,4200	0,4550	0,4800	0,4950	0,5000
	2	0,0025	0,0100	0,0225	0,0400	0,0625	0,0900	0,1225	0,1600	0,2025	0,2500
3	0	0,8574	0,7290	0,6141	0,5120	0,4219	0,3430	0,2746	0,2160	0,1664	0,1250
	1	0,1354	0,2430	0,3251	0,3840	0,4219	0,4410	0,4436	0,4320	0,4084	0,3750
	2	0,0071	0,0270	0,0574	0,0960	0,1406	0,1890	0,2389	0,2880	0,3341	0,3750
	3	0,0001	0,0010	0,0034	0,0080	0,0156	0,0270	0,0429	0,0640	0,0911	0,1250
4	0	0,8145	0,6561	0,5220	0,4096	0,3164	0,2401	0,1785	0,1296	0,0915	0,0625
	1	0,1715	0,2916	0,3685	0,4096	0,4219	0,4116	0,3845	0,3456	0,2995	0,2500
	2	0,0135	0,0486	0,0975	0,1536	0,2109	0,2646	0,3105	0,3456	0,3675	0,3750
	3	0,0005	0,0036	0,0115	0,0256	0,0469	0,0756	0,1115	0,1536	0,2005	0,2500
	4	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0039	0,0081	0,0150	0,0256	0,0410	0,0625
5	0	0,7738	0,5905	0,4437	0,3277	0,2373	0,1681	0,1160	0,0778	0,0503	0,0313
	1	0,2036	0,3281	0,3915	0,4096	0,3955	0,3602	0,3124	0,2592	0,2059	0,1563
	2	0,0214	0,0729	0,1382	0,2048	0,2637	0,3087	0,3364	0,3456	0,3369	0,3125
	3	0,0011	0,0081	0,0244	0,0512	0,0879	0,1323	0,1811	0,2304	0,2757	0,3125
	4	0,0000	0,0005	0,0022	0,0064	0,0146	0,0284	0,0488	0,0768	0,1128	0,1563
	5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010	0,0024	0,0053	0,0102	0,0185	0,0313
6	0	0,7351	0,5314	0,3771	0,2621	0,1780	0,1176	0,0754	0,0467	0,0277	0,0156
	1	0,2321	0,3543	0,3993	0,3932	0,3560	0,3025	0,2437	0,1866	0,1359	0,0938
	2	0,0305	0,0984	0,1762	0,2458	0,2966	0,3241	0,3280	0,3110	0,2780	0,2344
	3	0,0021	0,0146	0,0415	0,0819	0,1318	0,1852	0,2355	0,2765	0,3032	0,3125
	4	0,0001	0,0012	0,0055	0,0154	0,0330	0,0595	0,0951	0,1382	0,1861	0,2344
	5	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0044	0,0102	0,0205	0,0369	0,0609	0,0938
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0007	0,0018	0,0041	0,0083	0,0156
10	0	0,5987	0,3487	0,1969	0,1074	0,0563	0,0282	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1	0,3151	0,3874	0,3474	0,2684	0,1877	0,1211	0,0725	0,0403	0,0207	0,0098
	2	0,0746	0,1937	0,2759	0,3020	0,2816	0,2335	0,1757	0,1209	0,0763	0,0439
	3	0,0105	0,0574	0,1298	0,2013	0,2503	0,2668	0,2522	0,2150	0,1665	0,1172
	4	0,0010	0,0112	0,0401	0,0881	0,1460	0,2001	0,2377	0,2508	0,2384	0,2051
	5	0,0001	0,0015	0,0085	0,0264	0,0584	0,1029	0,1536	0,2007	0,2340	0,2461
	6	0,0000	0,0001	0,0012	0,0055	0,0162	0,0368	0,0689	0,1115	0,1596	0,2051
	7	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0031	0,0090	0,0212	0,0425	0,0746	0,1172
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0043	0,0106	0,0229	0,0439
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0016	0,0042	0,0098
	10	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0010

Таблица 7. Биномно разпределение - *продължение*

n	k	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50
20	0	0,3585	0,1216	0,0388	0,0115	0,0032	0,0008	0,0002	0,0000	0,0000	0,0000
	1	0,3774	0,2702	0,1368	0,0576	0,0211	0,0068	0,0020	0,0005	0,0001	0,0000
	2	0,1887	0,2852	0,2293	0,1369	0,0669	0,0278	0,0100	0,0031	0,0008	0,0002
	3	0,0596	0,1901	0,2428	0,2054	0,1339	0,0716	0,0323	0,0123	0,0040	0,0011
	4	0,0133	0,0898	0,1821	0,2182	0,1897	0,1304	0,0738	0,0350	0,0139	0,0046
	5	0,0022	0,0319	0,1028	0,1746	0,2023	0,1789	0,1272	0,0746	0,0365	0,0148
	6	0,0003	0,0089	0,0454	0,1091	0,1686	0,1916	0,1712	0,1244	0,0746	0,0370
	7	0,0000	0,0020	0,0160	0,0545	0,1124	0,1643	0,1844	0,1659	0,1221	0,0739
	8	0,0000	0,0004	0,0046	0,0222	0,0609	0,1144	0,1614	0,1797	0,1623	0,1201
	9	0,0000	0,0001	0,0011	0,0074	0,0271	0,0654	0,1158	0,1597	0,1771	0,1602
	10	0,0000	0,0000	0,0002	0,0020	0,0099	0,0308	0,0686	0,1171	0,1593	0,1762
	11	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0030	0,0120	0,0336	0,0710	0,1185	0,1602
	12	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	0,0039	0,0136	0,0355	0,0727	0,1201
	13	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0010	0,0045	0,0146	0,0366	0,0739
	14	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0012	0,0049	0,0150	0,0370
	15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0013	0,0049	0,0148
	16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0013	0,0046
	17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0011
	18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002
	19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	20	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000